

سامانه بانک تستی

FlowRax

فـ

Math

@Flow_KonKour



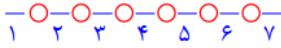
@LoPRax_KonKour



کلیک کن وباماهمراه شو!

۱

پرسپولسی‌ها در دایره‌ها و استقلالی‌ها در خطوط تیره قرار می‌گیرند.



$$n(A) = \binom{7}{4} 4! \times 6!$$

هیچ دو استقلالی کنار هم نباشد:

استقلالی‌ها یک در میان باشند:

$$\text{محل ایستادن استقلالی‌ها} \begin{cases} 1234 \\ 2345 \\ 3456 \\ 4567 \end{cases} \Rightarrow n(B) = 4 \times 4! \times 6!$$

$$\frac{n(A)}{n(B)} = \frac{\binom{7}{4}}{4} = \frac{35}{4}$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲

تعداد سه ضلعی‌ها $\binom{8}{3}$ و تعداد چهارضلعی‌ها $\binom{8}{4}$ و به همین ترتیب تا تعداد هشت ضلعی‌ها که $\binom{8}{8}$ است، یعنی:

$$\binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \dots + \binom{8}{8} \\ \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \dots + \binom{8}{8} = 2^8$$

از طرفی:

بنابراین:

$$\binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \dots + \binom{8}{8} = 2^8 - \binom{8}{0} - \binom{8}{1} - \binom{8}{2} = 256 - 1 - 8 - 28 = 219$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳

قرار است دانش‌آموزان تجربی کنار هم نباشند، در واقع از دانش‌آموزان ریاضی به عنوان مانع استفاده می‌کنیم. ابتدا موانع را جایگزین می‌کنیم:

○ R ○ R ○ R ○ R ○

از بین ۵ جایگاه موجود، ۳ جایگاه را انتخاب کرده و به دانش‌آموزان تجربی اختصاص می‌دهیم و سپس آن‌ها را با هم جایگشت می‌دهیم:

$$\binom{5}{3} \times 3! \times 4! = \frac{5!}{3! \times 2!} \times 3! \times 4! = \frac{5! \times 4!}{2!}$$

جایگشت ریاضی‌ها جایگشت تجربی‌ها

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴

وقتی k و Z ابتدا و انتها نیست پس جزء ۴ حرف وسطی می‌باشد:

- ○ ○ ○ ○ -

$$\binom{4}{2} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{انتخاب ۲ جایگاه از ۴ جایگاه وسط}}}{2!} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{جایگشت k, Z}}}{2!} \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{جایگشت ۴ حرف دیگر}}}{4!} = 6 \times 2 \times 2 \times 24 = 288$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵

بهتر است ابتدا آن‌هایی که رقم ۲ ندارند را یافته از کل کم کنیم:

$$9 \times 9 \times 8 \times 7 = \text{تعداد اعداد ۴ رقمی بدون تکرار ارقام}$$

$$8 \times 8 \times 7 \times 6 = \text{تعداد اعداد ۴ رقمی بدون رقم ۲ (بدون تکرار)}$$

$$9 \times 9 \times 8 \times 7 - 8 \times 8 \times 7 \times 6 = 8 \times 7 (81 - 48) = 56 \times 33 = 1848$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\underbrace{2!}_{(1)} \times \underbrace{\binom{6}{2}}_{(2)} \times \underbrace{2!}_{(3)} \times \underbrace{5!}_{(4)} = 60 \times 5! = 10 \times 6!$$

۶

(۱) جابه‌جایی ۲ حرف ۲! حالت دارد.

(۲) انتخاب ۲ عدد که بین ۲ حرف قرار می‌گیرند $\binom{6}{2}$ حالت دارد.

(۳) جابه‌جایی ۲ عدد که بین ۲ حرف قرار می‌گیرند ۲! حالت دارد.

(۴) حالت‌های انتخاب و جابه‌جایی ۲ حرف و اعداد بین آن‌ها را در (۱) و (۲) و (۳) حساب کردیم. این ۴ شیء را یک بسته در نظر می‌گیریم به همراه ۴ رقم دیگر ۵ شیء هستند که جابه‌جایی آن‌ها ۵! حالت دارد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\begin{aligned} \text{رقم هزارگان} & \begin{cases} \rightarrow 3 \Rightarrow \text{رقم صدگان باید ۶ باشد} \Rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} = 20 \\ \rightarrow 5 \text{ یا } 4 \Rightarrow \frac{2}{4} \times \frac{6}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} = 24 \\ \rightarrow 6 \Rightarrow \text{رقم صدگان باید ۰ یا ۱ یا ۲ باشد} \Rightarrow \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} = 60 \end{cases} \end{aligned}$$

۷

تعداد کل اعداد برابر $20 + 240 + 60 = 320$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸

تعداد حالاتی که یک در میان می‌ایستند.

$$\frac{6}{P} \times \frac{5}{E} \times \frac{5}{P} \times \frac{4}{E} \times \frac{4}{P} \times \frac{3}{E} \times \frac{3}{P} \times \frac{2}{E} \times \frac{2}{P} \times \frac{1}{E} \times \frac{1}{P} = 6!5!$$

تعداد حالاتی که هیچ دو استقلالی کنار هم نباشند:

پرسپولیسی‌ها در درون دایره‌ها قرار دارند. در این حالت، برای استقلالی‌ها ۷ جایگاه وجود دارد.

$$\text{---} \textcircled{6} \text{---} \textcircled{5} \text{---} \textcircled{4} \text{---} \textcircled{3} \text{---} \textcircled{2} \text{---} \textcircled{1} \text{---}$$

تعداد حالات ایستادن استقلالی‌ها $P(7,5)$ و پرسپولیسی‌ها ۶! است.

$$P(7,5) \times 6! = \frac{7!}{2!} \times 6! = 7! \times 5! \times 3 = 21 \times 5! \times 6!$$

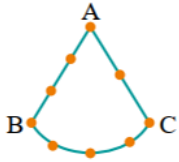
$$21 \times 5! \times 6! - 5! \times 6! = 20 \times 5! \times 6! = 120 \times 5! \times 6! = 120 \times 120 \times 120 = 120^3$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹

باید از ۹ نقطه، ۳ نقطه انتخاب کرد به شرطی که هر ۳ نقطه واقع بر AB یا AC نباشد.



$$\binom{9}{3} - \binom{4}{3} - \binom{3}{3} = \frac{9!}{6!3!} - \frac{4!}{3!1!} - 1 = 84 - 4 - 1 = 79$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$$

طبق اتحاد پاسکال داریم:

بنابراین:

$$\binom{17}{x-1} + \binom{17}{x} = \binom{18}{2x} \Rightarrow \binom{18}{x} = \binom{18}{2x} \Rightarrow \begin{cases} x = 2x \Rightarrow x = 0 \text{ غ ق ق} \\ x + 2x = 18 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$$

$$\binom{x+1}{x} + \binom{x+2}{x} = \binom{7}{6} + \binom{8}{6} = 7 + 28 = 35$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

مجموعه A دارای ۹ عضو است و در نتیجه $2^9 - 1 = 511$ زیرمجموعه غیرتهی دارد. از طرف دیگر، اگر اعداد ۸, ۶, ۴, ۲ عضو زیرمجموعه‌ای نباشند، حاصل ضرب اعضای آن مجموعه، عددی فرد می‌شود و اگر هر کدام از این اعداد عضو زیرمجموعه‌ای باشند، حاصل ضرب اعضای آن، عددی زوج می‌شود. پس تعداد زیرمجموعه‌های غیرتهی‌ای که حاصل ضرب اعضای آن‌ها عددی فرد است برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های غیرتهی مجموعه $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ که برابر است با:

$$2^5 - 1 = 31$$

$$511 - 31 = 480$$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌هایی که حاصل ضرب اعضای آن‌ها عددی زوج است برابر است با:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

ابتدا تعداد کل اعداد چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{9}{\text{هزارگان مخالف صفر}} \times \frac{10}{\text{صدگان}} \times \frac{10}{\text{دهگان}} \times \frac{2}{\text{یکان} = 5 \text{ یا } 0} = 1800$$

اکنون تعداد اعداد چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵ را که رقم تکراری ندارند، پیدا می‌کنیم:

$$\frac{8}{\text{هزارگان مخالف}} \times \frac{8}{\text{صدگان مخالف}} \times \frac{7}{\text{هزارگان مخالف دهگان}} \times \frac{1}{\text{یکان} = 5} = 448$$

و صدگان و یکان هزارگان و یکان صفر و ۵

$$\frac{9}{\text{هزارگان مخالف}} \times \frac{8}{\text{صدگان مخالف}} \times \frac{7}{\text{هزارگان صدگان}} \times \frac{1}{\text{یکان} = 5} = 504$$

و صدگان و یکان هزارگان و یکان صفر

$$1800 - 952 = 848$$

تعداد این اعداد برابر $952 = 504 + 448$ است.

پس تعداد اعداد مورد نظر مساله برابر است با:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱

۱۲

۱۳

فرض کنید مجموعه مورد نظر n عضو دارد، در این صورت، $m = \binom{n}{3}$.

اگر دو عضو از مجموعه را حذف کنیم، $n-2$ عضو باقی می ماند. پس $m - 49 = \binom{n-2}{3}$ بنابراین:

$$\binom{n}{3} - 49 = \binom{n-2}{3} \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - 49 = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}$$

$$\Rightarrow 6n^2 - 24n - 270 = 0 \Rightarrow n^2 - 4n - 45 = 0 \Rightarrow (n-9)(n+5) = 0 \Rightarrow n = 9$$

بنابراین مجموعه مورد نظر ۹ عضو دارد و تعداد زیرمجموعه های ۲ عضوی آن برابر است با:

$$\binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴

ابتدا شش کتاب ریاضی را در کنار هم قرار می دهیم که این کار به ۶! حالت ممکن است.

$$\bigcirc \boxed{\text{ریاضی ۱}} \bigcirc \boxed{\text{ریاضی ۲}} \bigcirc \boxed{\text{ریاضی ۳}} \bigcirc \boxed{\text{ریاضی ۴}} \bigcirc \boxed{\text{ریاضی ۵}} \bigcirc \boxed{\text{ریاضی ۶}}$$

اکنون در هفت جایگاه خالی بین کتاب های ریاضی و دو طرف آنها، چهار کتاب فیزیک را قرار می دهیم که این کار به $P(7,4)$ حالت ممکن است. بنابراین کل حالت های مورد نظر برابر است با:

$$6! \times P(7,4) = 6! \times \frac{7!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} \times 7! = 15 \times 8 \times 7! = 15 \times 8 \times 7!$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵

ابتدا چهار خانواده از بین شش خانواده را به $\binom{6}{4}$ حالت انتخاب می کنیم. اکنون از هر خانواده انتخاب شده به ۳ حالت می توان یکی از اعضای خانواده را انتخاب

$$\binom{6}{4} \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 1215$$

کرد. بنابراین تعداد حالت های مطلوب برابر است با:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶

تساوی داده شده را ساده می کنیم:

$$P(n,3) = \Delta C(n,3) + 3\Delta \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = \frac{\Delta n!}{(n-3)!3!} + 3\Delta$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}} = \frac{\Delta n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{6\cancel{(n-3)!}} + 3\Delta$$

$$n(n-1)(n-2) = \frac{\Delta n(n-1)(n-2)}{6} + 3\Delta \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 3\Delta$$

$$n^3 - 3n^2 + 2n - 210 = 0 \Rightarrow n^3 - 7n^2 + 4n^2 + 2n - 210 = 0$$

$$n^2(n-7) + (4n+30)(n-7) = 0 \Rightarrow (n-7)(n^2 + 4n + 30) = 0 \Rightarrow n = 7$$

$$C(n,4) = C(7,4) = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{6 \times 4!} = 35$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\frac{n!}{2(1+2+3+\dots+33)} = 32! \Rightarrow \frac{n!}{2 \times \frac{33 \times 34}{2}} = 32!$$

$$n! = 32! \times 33 \times 34 \Rightarrow n! = 34! \Rightarrow n = 34$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷

۱۸

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 ۶۴ \square \square \square \Rightarrow ۶ \times ۵ \times ۴ \\
 ۶۵ \square \square \square \Rightarrow ۶ \times ۵ \times ۴ \\
 ۶۷ \square \square \square \Rightarrow ۶ \times ۵ \times ۴ \\
 ۶۹ \square \square \square \Rightarrow ۶ \times ۵ \times ۴
 \end{array} \right\} \Rightarrow ۴۸۰ \\
 \left. \begin{array}{l}
 ۷۰ \square \square \square \Rightarrow ۶ \times ۵ \times ۴ \\
 ۷۱ \square \square \square \Rightarrow ۶ \times ۵ \times ۴ \\
 ۷۲ \square \square \square \Rightarrow ۶ \times ۵ \times ۴ \\
 ۷۴ \square \square \square \Rightarrow ۶ \times ۵ \times ۴ \\
 ۷۵ \square \square \square \Rightarrow ۶ \times ۵ \times ۴ \\
 ۷۶ \square \square \square \Rightarrow ۶ \times ۵ \times ۴ \\
 ۷۹ \square \square \square \Rightarrow ۶ \times ۵ \times ۴
 \end{array} \right\} \Rightarrow ۸۴۰ \\
 \left. \begin{array}{l}
 ۹۰ \square \square \square \Rightarrow ۶ \times ۵ \times ۴ \\
 ۹۱ \square \square \square \Rightarrow ۶ \times ۵ \times ۴ \\
 ۹۲ \square \square \square \Rightarrow ۶ \times ۵ \times ۴ \\
 ۹۴ \square \square \square \Rightarrow ۶ \times ۵ \times ۴ \\
 ۹۵ \square \square \square \Rightarrow ۶ \times ۵ \times ۴ \\
 ۹۶ \square \square \square \Rightarrow ۶ \times ۵ \times ۴ \\
 ۹۷ \square \square \square \Rightarrow ۶ \times ۵ \times ۴
 \end{array} \right\} \Rightarrow ۸۴۰
 \end{array}$$

$$۴۸۰ + ۸۴۰ + ۸۴۰ = ۲۱۶۰$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹

از روش متمم استفاده می‌کنیم. ابتدا تعداد تمامی اعداد زوج ۴ رقمی را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{array}{l}
 \text{یکان صفر} \left\{ \begin{array}{l} \frac{۵}{۱} \times \frac{۴}{۱} \times \frac{۳}{۱} \times \frac{۱}{۱} = ۶۰ \\ \frac{۴}{۱} \times \frac{۴}{۱} \times \frac{۳}{۱} \times \frac{۳}{۲,۴,۶} = ۱۴۴ \end{array} \right. \xrightarrow{+} ۲۰۴ \\
 \text{یکان غیر صفر}
 \end{array}$$

حال تعداد اعداد زوج چهار رقمی که شامل ۶ نیستند را می‌یابیم:

$$\begin{array}{l}
 \text{یکان صفر} \left\{ \begin{array}{l} \frac{۴}{۱} \times \frac{۳}{۱} \times \frac{۲}{۱} \times \frac{۱}{۱} = ۲۴ \\ \frac{۳}{۱} \times \frac{۳}{۱} \times \frac{۲}{۱} \times \frac{۲}{۲,۴} = ۳۶ \end{array} \right. \xrightarrow{+} ۶۰ \\
 \text{یکان غیر صفر}
 \end{array}$$

$$۲۰۴ - ۶۰ = ۱۴۴$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰

حالت اول: الناز و بهناز حضور داشته باشند. در این حالت فرناز در مهمانی نخواهد بود و مریم باید ۳ نفر دیگر را دعوت کند.

حالت دوم: الناز حضور دارد و بهناز حضور ندارد. مریم باید ۴ نفر دیگر را دعوت کند.

حالت سوم: الناز و بهناز غایب باشند، مریم باید ۵ نفر را دعوت کند.

$$۲۰ + ۳۵ + ۲۱ = ۷۶$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱

نکته: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با: n!

حروف «ز»، «ت» و «ن» نقطه‌دار هستند. این حروف به ۳! حالت می‌توانند کنار هم قرار بگیرند. حال بسته سه حرفی «ز»، «ت» و «ن» و ۳ حرف دیگر «م»، «س» و «ا» به ۴! = (۳ + ۱)! حالت می‌توانند کنار هم قرار بگیرند. پس تعداد حالت‌های خواسته شده برابر است با:

$$۳! \times ۴! = ۶ \times ۲۴ = ۱۴۴$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲

نکته: می‌دانیم n نفر می‌توانند n! صف تشکیل دهند یا می‌توانند n! با یکدیگر جابه‌جا شوند.

با توجه به اینکه نفر اول و آخر صف باید برادرها باشند، پس ابتدا جای آن‌ها را مشخص می‌کنیم و بدیهی است ۴ نفر باقی‌مانده ۴! جابه‌جا می‌شوند.

$$\text{حالت } \frac{۲}{۱} \times \frac{۴}{۱} \times \frac{۳}{۱} \times \frac{۲}{۱} \times \frac{۱}{۱} \times \frac{۱}{۱} = ۴۸ \text{ یکی از برادرها برادر دوم}$$

بنابراین گزینه ۱ درست است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳

نکته (جایگشت): هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن اشیاء می‌گوییم و برابر است با $n!$.

نکته (تبدیل 1 شیء از میان n شیء): تعداد حالت‌های انتخاب و چینش 1 شیء از میان n شیء متمایز (ترتیب اشیاء مهم است و با جابه‌جایی هریک، حالت جدیدی به وجود می‌آید) برابر است با:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

با توجه به نکات، ابتدا دو کد از میان ۳ کد داده‌شده را، انتخاب می‌کنیم که با جایگشت $2!$ ، در ابتدا و انتهای رمز قرار می‌گیرند:

$$P(3, 2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

اینک ارقام در کنار هم $3!$ و حروف نیز کنار هم $3!$ جایگشت دارند و از طرفی دسته ارقام و دسته حروف در کنار یک کد باقی‌مانده، 3 شیء متمایز محسوب می‌شوند که با هم $3!$ جایگشت دارند.

پس طبق اصل ضرب، تعداد کل رمزها برابر است با:

$$6 \times 3! \times 3! \times 3! = (3!)^4 = 6^4$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴

نکته (ترکیب 1 شیء از میان n شیء): تعداد حالت‌های انتخاب 1 شیء از میان n شیء متمایز (فقط انتخاب مهم است و ترتیب اشیاء مهم نیست و جابه‌جایی اشیاء حالت جدیدی تولید نمی‌کند) برابر است با:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

در میان اعضای مجموعه A ، فقط یک عضو زوج وجود دارد (عدد ۶). از طرفی اگر بخواهیم مجموع ۴ عضو فرد باشد، حتماً باید یکی از آن‌ها زوج باشد و این یعنی زیرمجموعه چهارعضوی لزوماً شامل عضو ۶ است. پس ما باید ۳ عضو از میان ۶ عضو فرد مجموعه انتخاب کنیم و با رقم ۶، زیرمجموعه چهارعضوی تشکیل دهیم:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵

راه حل اول:

نکته: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با: $n!$

چون حرف وسط باید «ز» باشد، پس ۱ انتخاب بیشتر برای آن باقی نمی‌ماند. حرف اول باید نقطه‌دار باشد، پس باید از حروف $\{ت, ب, ن, ی\}$ انتخاب شود، پس ۴ انتخاب داریم، بنابراین ۷ حرف باقی‌مانده با هم جایگشت دارند و تعداد کل کلمات برابر است با: $4 \times 7!$

راه حل دوم:

از اصل ضرب استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{\{ز\}} \times \frac{2}{\{ت, ب, ن, ی\}} \times \frac{3}{\{ت, ب, ن, ی\}} \times \frac{4}{\{ت, ب, ن, ی\}} \times \frac{5}{\{ت, ب, ن, ی\}} \times \frac{6}{\{ت, ب, ن, ی\}} \times \frac{7}{\{ت, ب, ن, ی\}} \times \frac{4}{\{ت, ب, ن, ی\}} = 1 \times 2 \times \dots \times 7 \times 4 = 7! \times 4$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶

نکته (اصل ضرب): اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد به طوری که برای انجام مرحله اول m روش و برای هر کدام از این m روش، مرحله دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار موردنظر به $m \times n$ روش قابل انجام است. مسئله را در سه حالت حل می کنیم و طبق اصل جمع جواب را به دست می آوریم.

(۱) اگر ۳ در صدگان باشد، عدد ساخته شده از ۴۸۵ کوچک تر خواهد بود، پس در انتخاب رقم دهگان و یکان محدودیتی نداریم:

$$\begin{array}{c} 1 \times 9 \times 8 = 72 \\ \downarrow \\ \{3\} \end{array} \quad \text{عدد متمایز}$$

(۲) اگر ۳ در دهگان باشد، رقم صدگان می تواند $\{1, 2, 4\}$ باشد:

$$\begin{array}{c} 3 \times 1 \times 8 = 24 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \{1, 2, 4\} \quad \{3\} \end{array} \quad \text{عدد متمایز}$$

(۳) اگر ۳ در یکان باشد، برای صدگان دو حالت رخ می دهد:

$$\begin{array}{c} 2 \times 8 \times 1 = 16 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \{1, 2\} \quad \{3\} \end{array} \quad \text{عدد متمایز}$$

$$\begin{array}{c} 1 \times 7 \times 1 = 7 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \{4\} \quad \{9, 4, 3\} \quad \{3\} \end{array} \quad \text{عدد متمایز}$$

پس در مجموع $72 + 24 + 16 + 7 = 119$ عدد ۳ رقمی با این شرایط وجود دارد.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷

نکته: به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشند یا به عبارتی به هر زیرمجموعه r عضوی از یک مجموعه n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شیء می گوئیم. تعداد ترکیب های r تایی از n شیء متمایز را معمولاً با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می دهیم و داریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

ابتدا ۳ مدرسه متمایز از ۵ مدرسه را انتخاب می کنیم. سپس از بین ۶ داوطلب هریک از این سه مدرسه یک نفر را برای شرکت در مسابقه انتخاب می کنیم.

$$\binom{5}{3} \times \binom{6}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{6}{1} = \frac{5!}{3!2!} \times 6^3 = 10 \times 216 = 2160$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیرمجموعه r عضوی از یک مجموعه n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم. تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز را معمولاً با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

ابتدا از بین ۵ زوج ساکن در ساختمان یک زوج انتخاب می‌کنیم که این کار به $\binom{5}{1}$ طریق امکان‌پذیر است.

اکنون باید دو نفر دیگر انتخاب کنیم که زن و شوهر نباشند.

برای این کار از ۴ زوج باقی‌مانده، ۲ زوج انتخاب می‌کنیم؛ یعنی $\binom{4}{2}$ و سپس از هر زوج انتخاب‌شده در مرحله قبل، ۱ نفر را انتخاب می‌کنیم.

بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:

$$\binom{5}{1} \binom{4}{2} \underbrace{\binom{2}{1} \binom{2}{1}}_{\text{۱ نفر از هر زوج}} = 5 \times 6 \times 2 \times 2 = 120.$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیرمجموعه r عضوی از یک مجموعه n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم. تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز را معمولاً با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

$$\text{نکته: } \binom{n}{r} = \binom{n}{k} \Rightarrow \begin{cases} r = k \\ r + k = n \end{cases}$$

$$\text{نکته: } \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

با توجه به نکات بالا، ابتدا سمت چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\binom{15}{2k-2} + \binom{15}{2k-1} = \binom{16}{2k-1}$$

اکنون داریم:

$$\binom{16}{2k-1} = \binom{16}{k^2+2} \Rightarrow \begin{cases} 2k-1 = k^2+2 \\ 2k-1+k^2+2=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2-2k+3=0 \xrightarrow{\Delta<0} \text{ریشه حقیقی ندارد.} \\ k^2+2k-15=0 \Rightarrow (k+5)(k-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} k=-5 \times \\ k=3 \checkmark \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین خواسته سؤال برابر است با:

$$k^3 - 2k = 27 - 6 = 21$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰

نکته (اصل جمع): اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m + n$ روش وجود دارد.

نکته (اصل ضرب): اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله اول m روش و برای هر کدام از این m روش، مرحله دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار مورد نظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

اعداد یک رقمی طبیعی مضرب ۳، ارقام ۳، ۶، ۹ و سایر ارقام مورد استفاده، ارقام ۸، ۷، ۵، ۴، ۲، ۱، ۰ هستند؛ بنابراین تعداد اعداد خواسته شده را در دو حالت زیر به دست می آوریم:

$$252 = \text{تعداد اعداد} \Rightarrow \frac{1}{3 \text{ مضرب}} \times \frac{6}{3 \text{ مضرب}} \times \frac{2}{3 \text{ مضرب}} \times \frac{7}{3 \text{ مضرب}} \times \frac{3}{3 \text{ مضرب}} : \text{حالت اول}$$

$$1080 = \text{تعداد اعداد} \Rightarrow \frac{5}{3 \text{ مضرب}} \times \frac{2}{3 \text{ مضرب}} \times \frac{6}{3 \text{ مضرب}} \times \frac{3}{3 \text{ مضرب}} \times \frac{6}{\text{به جز صفر}} : \text{حالت دوم}$$

طبق اصل جمع تعداد کل اعداد خواسته شده برابر ۱۳۳۲ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱

نکته: به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیرمجموعه r عضوی از یک مجموعه n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شیء می گوئیم که آن را با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می دهیم و داریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

نکته (اصل ضرب): اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد به طوری که برای انجام مرحله اول m روش وجود داشته باشد و برای هر کدام از این m روش، مرحله دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار مورد نظر به $m \times n$ روش قابل انجام است.

برای این منظور باید ۳ نفر از دهم، ۱ نفر از یازدهم و ۱ نفر از دوازدهم انتخاب شوند (طبق فرض سؤال بیشتر اعضای تیم، کلاس دهمی هستند) و طبق اصل ضرب داریم:

$$\binom{7}{3} \times \binom{5}{1} \times \binom{3}{1} = \frac{7!}{4!3!} \times 5 \times 3 = 7 \times 5 \times 5 \times 3 = 525$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیرمجموعه r عضوی از یک مجموعه n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم. تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز را معمولاً با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

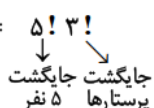
$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

نکته: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر $n!$ است.

ابتدا ۴ دکتر از ۷ دکتر و سپس ۳ پرستار از ۶ پرستار انتخاب می‌کنیم که این کار به ترتیب به $\binom{7}{4}$ و $\binom{6}{3}$ روش ممکن است.

اکنون سه پرستار انتخاب شده را در کنار هم قرار می‌دهیم و داریم:

$$N_1, N_2, N_3, D_1, D_2, D_3, D_4$$

تعداد صف‌های خواسته شده = $5! \cdot 3!$

 جایگشت پرستارها ۵ نفر
 جایگشت ۳ نفر

پس تعداد کل حالات ممکن برابر است با:

$$\binom{7}{4} \binom{6}{3} 5! \cdot 3! = \frac{7!}{4!3!} \times \frac{6!}{3!3!} \times 5! \cdot 3! = 7! \times \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 6} \times 5 = 100 \times 7!$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر $n!$ است.

تعداد کل حالات قرار گرفتن ۱۲ مداد رنگی در کنار یکدیگر برابر $12!$ است.

ابتدا تعداد حالاتی را که در آن‌ها مداد مشکی در کنار مداد سفید قرار گرفته است پیدا و از کل حالات کم می‌کنیم. برای این کار فرض می‌کنیم مداد سفید در کنار مداد مشکی تشکیل یک بسته داده‌اند. تشکیل این بسته دو حالت سفید-مشکی یا مشکی-سفید دارد. تعداد حالت‌های قرار گرفتن این بسته سفید و مشکی در کنار ۱۰ رنگ دیگر برابر $11!$ است، پس تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$12! - 2 \times 11! = 12 \times 11! - 2 \times 11! = 11!(12 - 2) = 11! \times 10$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴

نکته: به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیرمجموعه r عضوی از یک مجموعه n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم. تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز را معمولاً با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

راه حل اول:

ابتدا یک جفت کفش را انتخاب می‌کنیم و هر دو لنگه را برمی‌داریم. سپس از هفت جفت کفش باقی‌مانده، ۲ جفت را انتخاب می‌کنیم و از هر کدام یکی از لنگه‌های راست یا چپ را برمی‌داریم. تعداد راه‌های چنین انتخابی برابر است با:

$$\binom{8}{1} \times \binom{7}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 8 \times \frac{7 \times 6}{2} \times 2 \times 2 = 8 \times 42 \times 2 = 672$$

راه حل دوم:

ابتدا یک جفت کفش از بین ۸ جفت کفش انتخاب می‌کنیم. سپس از بین ۱۴ لنگه باقی‌مانده یکی را انتخاب می‌کنیم و جفت آن لنگه را دور می‌اندازیم. سپس از بین ۱۲ لنگه باقی‌مانده یکی را انتخاب می‌کنیم. توجه کنید در این روش برای لنگه سوم و چهارم انتخابی ترتیب در نظر گرفته شده است، پس با تقسیم بر دو کردن تعداد راه‌های انتخاب، جواب سؤال به دست می‌آید:

$$\frac{\binom{8}{1} \times \binom{14}{1} \times \binom{12}{1}}{2} = \frac{8 \times 14 \times 12}{2} = 8 \times 7 \times 12 = 672$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵

نکته: به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم. تعداد

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad \text{نمایش می‌دهیم و داریم:}$$

ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز را با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم: می‌خواهیم ۳ نفر انتخاب کنیم، پس باید ابتدا از ۱۰ استان، ۳ استان را انتخاب کنیم که این کار به $\binom{10}{3}$ روش قابل انجام است؛ چون قرار است افراد

انتخابی هم‌استانی نباشند، باید از هر ۴ نفر که هم‌استانی هستند، حداکثر یک نفر را انتخاب کرد که این کار به $\binom{4}{1}$ روش امکان‌پذیر است. بنابراین:

$$\underbrace{\binom{10}{3}}_{\text{انتخاب ۳ استان}} \times \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{انتخاب نفر سوم}} \times \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{انتخاب نفر دوم}} \times \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{انتخاب نفر اول}} = 120 \times 4 \times 4 \times 4 = 7680$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶

ابتدا ۲ دختر و ۲ پسر انتخاب می‌کنیم. سپس دخترها را یک بسته و پسرها را نیز یک بسته در نظر می‌گیریم:

$$\boxed{\boxed{B}} \boxed{\boxed{B}} \boxed{\boxed{G}} \boxed{\boxed{G}} \Rightarrow \underbrace{\binom{4}{2} \binom{3}{2} \times 2! \times 2!}_{6 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2} = 144$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷

پله اول: تعداد کل افراد گروه برابر $4 + 4 + 3 = 11$ می باشد.

حال پیشامد حالت‌هایی که میانگین ۴ تای آن‌ها برابر ۲۰ می شود را می نویسیم:

(یک نفر ۱۹ ساله و ۲ نفر ۲۰ ساله و یک نفر ۲۱ ساله) یا (۲ نفر ۱۹ ساله و ۲ نفر ۲۱ ساله) یا (۴ نفر ۲۰ ساله)

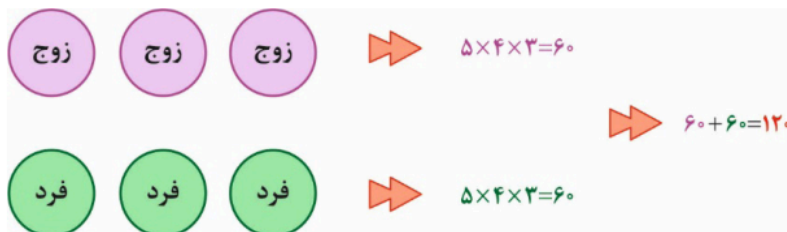
پله دوم: تعداد حالت‌ها را محاسبه می کنیم:

$$\binom{4}{4} + \binom{4}{2} \binom{3}{2} + \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{3}{1} = 1 + 18 + 72 = 91$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸

برای آنکه اعداد زوج و فرد کنار هم قرار نگیرند، باید یکی از حالت‌های زیر اتفاق بیفتد:



(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹

پله اول: ابتدا حالت‌هایی که حاصلضرب اعداد رو شده بیشتر از ۱۲۴ می باشد می نویسیم:

$$(5, 5, 5) \rightarrow 1 : \frac{3!}{3!} = 1$$

$$(5, 5, 6) \rightarrow 3 : \frac{3!}{2!} = 3$$

$$(5, 6, 6) \rightarrow 3 : \frac{3!}{2!} = 3$$

$$(4, 6, 6) \rightarrow 3 : \frac{3!}{2!} = 3$$

$$(6, 6, 6) \rightarrow 1 : \frac{3!}{3!} = 1$$

پله دوم: کل حالت‌ها برابر ۱۱ تا است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۰

ابتدا با استفاده از اصل ضرب تعداد همه اعداد هفت رقمی را با شرایط گفته شده به دست می آوریم، (صفر نمی تواند در رقم اول باشد)

سپس بر ۲! تقسیم می کنیم تا تعداد اعدادی که رقم ۴ در سمت چپ رقم ۶ قرار می گیرد به دست آید:

$$\underbrace{\text{○○○○○○○}}_{\text{ارقام ۰, ۱, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹}} \Rightarrow \frac{5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2!} = 300$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۱

برای این که به هر نفر حداقل یک جایزه برسد، باید تعداد جایزه‌هایی که بین افراد پخش می شود به صورت زیر باشد:

$$\boxed{3 \ 1 \ 1 \ 1} \Rightarrow \frac{4!}{3!} \times \binom{6}{3} \binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{1}{1} = 4 \times 120 = 480$$

حالت ۱: به یک نفر ۳ جایزه برسد.

$$\boxed{2 \ 1 \ 1 \ 2} \Rightarrow \frac{4!}{2!2!} \times \binom{6}{2} \binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{2} = 6 \times 15 \times 4 \times 3 \times 1 = 1080$$

حالت ۲: به دو نفر ۲ جایزه برسد

پس تعداد کل حالات برابر $480 + 1080 = 1560$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۲

ابتدا ۳ پسر از بین ۵ پسر و ۱ دختر از بین ۴ دختر انتخاب می‌کنیم و سپس جایگشت دوری این ۴ نفر را محاسبه می‌کنیم:



$$\Rightarrow \binom{5}{3} \binom{4}{1} \times (4-1)! = 10 \times 4 \times 6 = 240$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۳

برای این که هیچ دو پسری کنار هم نباشند، دخترها و پسرها باید به صورت یکی در میان قرار گیرند.

$$\Rightarrow 3! \times 4! \quad \text{پسر دختر پسر دختر پسر دختر پسر}$$

اما برای این که هیچ دو دختری کناری هم نباشند، باید بین پسرها جای خالی در نظر بگیریم از بین ۵ جای خالی ایجاد شده، ۳ تا را برای دخترها انتخاب کنیم:

$$\Rightarrow \binom{5}{3} \times 3! \times 4! \quad \text{پسر پسر پسر پسر پسر}$$

پس نسبت تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\frac{3! \times 4!}{\binom{5}{3} \times 3! \times 4!} = \frac{1}{10}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۴

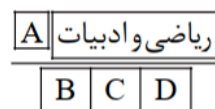
عدد ۵ نمی‌تواند در یکان قرار بگیرد، پس ۲ حالت برای رقم یکان داریم. عدد صفر نمی‌تواند در رقم صدگان قرار بگیرد و چون تکرار ارقام مجاز نیست، پس ۴ حالت برای رقم صدگان داریم و در نهایت ۴ حالت برای رقم دهگان باقی می‌ماند.

$$\frac{4}{0 \times} \frac{4}{\text{عدد ۷}} \frac{2}{\text{عدد ۱}} \quad 4 \times 4 \times 2 = 32$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۵

در هر ردیف قفسه ۳ کتاب قرار می‌گیرد. دو کتاب با عناوین ریاضی و ادبیات را به همراه یکی از ۴ کتاب دیگر در یک ردیف قرار می‌دهیم.



$$\left(\binom{4}{1} \times \underbrace{\frac{2!}{\text{جایگشت دو بسته}} \times \frac{2!}{\text{جایگشت دو کتاب}}}_{\text{ردیف اول}} \times \underbrace{\binom{3}{3} \times 3!}_{\text{ردیف دوم}} \right)^2_{\text{جابه جایی ردیف‌ها}} = 192$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۶

پاسخ تشریحی **گام اول:** برای آن که هیچ یک از نفرات انتخابی از یک کلاس نباشند، ابتدا ۵ کلاس از بین ۱۵ کلاس انتخاب می کنیم که این کار را به $\binom{15}{5}$ حالت می توانیم انجام دهیم.

گام دوم: از هر یک از کلاس های انتخاب شده می بایست یک نفر را از بین ۷ نفر گروه سرود آن کلاس انتخاب کنیم؛ پس برای هر کلاس $\binom{7}{1}$ حالت داریم.

گام سوم: طبق اصل ضرب، تعداد کل حالت ها برابر است با: $\binom{15}{5} \times \underbrace{\binom{7}{1} \times \binom{7}{1} \times \binom{7}{1} \times \binom{7}{1} \times \binom{7}{1}}_{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7} = \binom{15}{5} \times 7^5$ تعداد حالت ها

گام چهارم: توجه کنید که $\binom{15}{5} = \binom{15}{10}$ است، پس: $\text{تعداد حالت ها} = \binom{15}{10} \times 7^5$

مجموعشان برابر ۱۵ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۷

پاسخ تشریحی **گام اول:** در مجموع $4 + 5 = 9$ دانش آموز قرار است در یک ردیف کنار هم بایستند و این ۹ دانش آموز به ۹! حالت می توانند جایگشت داشته باشند؛ پس فضای نمونه ای این آزمایش تصادفی $n(S) = 9!$ حالت دارد.

گام دوم: برای آن که کلاس اولی ها یکی در میان باشند، مطابق شکل زیر، ابتدا کلاس اولی ها به ۵! حالت در یک ردیف قرار می گیرند و سپس در فضای خالی بین هر دو نفر یک نفر کلاس دومی قرار می گیرد و کلاس دومی ها نیز در این فضاهای خالی به ۴! حالت می توانند جایگشت کنند. توجه کنید که چون تعداد کلاس اولی ها یک نفر بیشتر است، باید نفر اول و آخر کلاس اولی باشد.

اولی دومی اولی دومی اولی دومی اولی دومی اولی

طبق اصل ضرب، تعداد حالت ها برابر با $n(A) = 5! \times 4!$ است.

گام سوم: در حالتی که بخواهیم هیچ دو کلاس دومی کنار هم نباشند، ابتدا دوباره کلاس اولی ها را به ۵! حالت در یک ردیف می چینیم؛ سپس مطابق شکل زیر، در جاهای خالی کلاس دومی ها را قرار می دهیم. برای اولین نفر آن ها ۶ جای خالی، برای بعدی ۵ جای خالی، بعدی ۴ جای خالی و برای آخرین نفر ۳ جای خالی وجود خواهد داشت. به این ترتیب، هیچ دو کلاس دومی کنار هم قرار نخواهند گرفت.

اولی اولی اولی اولی اولی اولی اولی

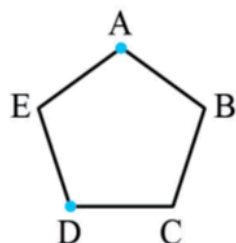
طبق اصل ضرب، تعداد حالت ها برابر با $n(B) = 5! \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$ است.

گام چهارم: خواسته سؤال $\frac{P(A)}{P(B)}$ است.

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{n(A)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{\frac{5! \times 4!}{9!}}{\frac{5! \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{9!}} = \frac{1}{15}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۸



$$A, D \text{ هم‌رنگ (الف)} \quad \frac{A \ D \ E \ B \ C}{3 \times 1 \times 2 \times 2 \times 1} = 12$$

$$A, D \text{ متفاوت (ب)} \quad \frac{A \ D \ E \ B \ C}{3 \times 2 \times 1 \times 3} = 18$$

اگر رنگ‌ها ۱ و ۲ و ۳ باشند. با فرض این که A رنگ ۱ و D رنگ ۲ باشد، رنگ‌های B و C:

$$B \quad 2 \quad 2 \quad 3$$

$$C \quad 3 \quad 1 \quad 1$$

$$\text{جواب: } 12 + 18 = 30$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

از آنجایی که در کلمات ساخته شده حروف تکراری نداریم، حروف سوم تا هفتم صرف‌نظر از این که کدام یک از ۹ حرف باشند، $5! = 120$ حالت متفاوت دارند که تنها یک حالت آن قابل قبول است. از آنجایی که $9!$ حالت مختلف برای این حروف موجود است، از هر $5!$ حالت تنها یک حالت قابل قبول است. در نتیجه داریم:

$$\frac{9!}{5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 3024$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

برای عدد دو رقمی که ارقام آن یکسان هستند، ۹ حالت داریم (۹۹، ۳۳، ۲۲، ۱۱). به جای دایره، ۱۴ حالت داریم و به جای اولین ستاره از سمت چپ، ۴ رقم {۲، ۴، ۶، ۸} و به جای هریک از دیگر ستاره‌ها ۹ رقم می‌تواند قرار گیرد. پس طبق اصل ضرب داریم:

$$4 \times 9 \times 14 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 56 \times 9^5$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$n(S) = P(5, 4) + P(5, 5) = 5! + 5! = 240$$

۴ یا ۵ تا از این پنج رقم را کنار هم قرار می‌دهیم، پس:

جمع این ۵ رقم برابر با ۱۶ است؛ پس هیچ‌یک از اعداد پنج‌رقمی مضرب ۳ نیست.

در اعداد چهاررقمی، اگر با ارقام ۲، ۳، ۴، ۶ بسازیم جمع ارقام برابر با ۱۵ و اگر از ارقام ۱، ۲، ۳، ۶ استفاده شود، مجموع ارقام برابر با ۱۲ است. پس:

$$n(A) = 2 \times 4! = 48$$

$$P(A) = \frac{48}{240} = \frac{1}{5}$$

و بنابراین:

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

پاسخ تشریحی گام اول: از آنجایی که چهار حرف آخر مشخص هستند، فقط باید تعداد حالت‌های نوشتن دو حرف اول با استفاده از حروف

کلمه «جهان» را به دست آورد.

کلمه شش حرفی: _ _ _ _ _ گردی



این دو حرف از حروف کلمه «جهان» باید باشد.

گام دوم: چون ترتیب قرارگیری حروف هم مهم است، باید تعداد جایگشت‌های دوتایی از چهار شیء متمایز (حروف کلمه «جهان») را به دست آوریم که برابر است با:

$$P(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۲

۵۳

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا یک ردیف برای نشستن مردها انتخاب می‌شود که تعداد حالت‌های آن ۲ است.

گام دوم: سپس مردها را به ۳! حالت در یک ردیف کنار هم می‌نشانیم.

گام سوم: اگر زوج‌ها را a ، b و c بنامیم، برای هر حالت نشستن مردها مانند $a'b'c'$ ، زن‌ها به یکی از دو حالت $b'c'a'$ یا $c'a'b'$ می‌توانند بنشینند، یعنی دو حالت برای نشستن آن‌ها وجود دارد.

گام چهارم: پس طبق اصل ضرب تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$2 \times 3! \times 2 \times 1 \times 1 = 24$$

انتخاب یکی از دو ردیف برای مردها (دو حالت)

جایگشت مردها در یک ردیف (۳! حالت)

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۴

پاسخ تشریحی

مسئله را به دو حالت تقسیم می‌کنیم.

گام اول: حالت اول: بین شخص a و b ، یک نفر سخنرانی کند. فرض می‌کنیم شخص x قرار است بین a و b سخنرانی کند. بسته‌ای به شکل

در نظر می‌گیریم. شخص x باید از میان چهار نفر دیگر یعنی c ، d ، e و f انتخاب شود که تعداد حالت‌های آن $\binom{4}{1}$ است. دو

شخص a و b در بسته در نظر گرفته شده به ۲! حالت جایگشت دارند؛ همچنین این بسته در کنار سه نفر باقی‌مانده، چهار شیء را تشکیل می‌دهند که در کنار هم ۴! جایگشت دارند؛ پس طبق اصل ضرب تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$\binom{4}{1} \times 2! \times 4! = 4 \times 2 \times 24 = 192$$

انتخاب شخص x

جایگشت a و b

جایگشت ۴ شیء

سه نفر باقی‌مانده

چهار شیء

گام دوم: حالت دوم: بین شخص a و b ، دو نفر سخنرانی کنند. مشابه حالت اول، این بار فرض می‌کنیم اشخاص x و y قرار است بین a و b

سخنرانی کنند. بسته‌ای به شکل $a \mid xy \mid b$ در نظر می‌گیریم. x و y باید از میان چهار نفر دیگر انتخاب شوند که این کار به $\binom{4}{2}$ حالت ممکن

است. دو شخص a و b و همچنین دو شخص x و y در داخل بسته هر کدام ۲! حالت جایگشت دارند (دوتا ۲! حالت)؛ همچنین این بسته در کنار دو نفر باقی‌مانده، سه شیء را تشکیل می‌دهند که در کنار هم ۳! جایگشت دارد، پس طبق اصل ضرب تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$\binom{4}{2} \times 2! \times 2! \times 3! = 6 \times 2 \times 2 \times 6 = 144$$

انتخاب x و y

جایگشت a و b

جایگشت x و y

جایگشت سه شیء

دو نفر باقی‌مانده

سه شیء

گام سوم: تعداد کل حالت‌ها طبق اصل جمع برابر با $192 + 144 = 336$ حالت است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۵

پاسخ تشریحی گام اول: اعداد طبیعی کمتر از ۱۵ به صورت $\{1, 2, 3, \dots, 14\}$ هستند که پنج عدد اول فرد شامل $\{3, 5, 7, 11, 13\}$ بین آنها وجود دارد.

گام دوم: می‌خواهیم ۴ عدد انتخاب کنیم که حداقل ۲ تای آنها از مجموعه $\{3, 5, 7, 11, 13\}$ باشند. فرض می‌کنیم:

$$A = \overbrace{\{3, 5, 7, 11, 13\}}^{\text{عضو ۵}} \quad B = \overbrace{\{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14\}}^{\text{عضو ۹}}$$

این که حداقل ۲ تای آنها از مجموعه A باشند، معادل آن است که یا «دوتا از مجموعه A باشد و دوتا از مجموعه B» یا «سه تا از مجموعه A باشد و یکی از مجموعه B» یا «هر ۴ تا از مجموعه A باشند».

گام سوم: طبق اصل ضرب و هم‌چنین اصل جمع، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$\begin{array}{c} \text{A از ۲ تا ۵} \quad \text{B از ۲ تا ۹} \quad \text{A از ۳ تا ۵} \quad \text{یکی از B} \quad \text{هر ۴ تا از A} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \binom{5}{2} \quad \binom{9}{2} + \binom{5}{3} \quad \binom{9}{1} + \binom{5}{4} = \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{9 \times 8}{2} + \frac{5 \times 4}{2} \times 9 + 5 = 10 \times 36 + 10 \times 9 + 5 = 455 \end{array}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۶

پاسخ تشریحی گام اول: کلمه SERESHT از پنج حرف متمایز S, E, R, H, T تشکیل شده است و حرف E و S هر کدام دو بار تکرار شده‌اند. برای نوشتن کلمه سه حرفی با حروف کلمه SERESHT، سه حالت را در نظر می‌گیریم.

گام دوم: **حالت اول:** هر سه حرف متمایز باشد. در این حالت ۳ حرف از ۵ حرف متمایز انتخاب کرده و سپس جایگشت آنها در کنار هم یعنی $3! \times \binom{5}{3}$ را در نظر می‌گیریم.

گام سوم: **حالت دوم:** دو حرف E انتخاب شوند و یک حرف از ۴ حرف متمایز دیگر به $\binom{4}{1}$ حالت انتخاب شوند. جایگشت این ۳ حرف در کنار هم، چون ۲ تای آنها تکراری است به صورت $\frac{3!}{2!}$ است $\left(\binom{4}{1} \times \frac{3!}{2!} \right)$.

گام چهارم: **حالت سوم:** مشابه حالت دوم، فقط این بار دو حرف S به جای E ها انتخاب شوند. $\left(\binom{4}{1} \times \frac{3!}{2!} \right)$.

گام پنجم: طبق اصل جمع، تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$\begin{array}{c} \text{جایگشت} \quad \text{دوتا S و انتخاب} \quad \text{جایگشت} \quad \text{دوتا E و انتخاب} \quad \text{سه حرف متمایز} \\ \text{حروف} \quad \text{یک حرف دیگر} \quad \text{حروف} \quad \text{یک حرف دیگر} \quad \text{حرف} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \binom{3}{1} \times \frac{3!}{2!} + \binom{4}{1} \times \frac{3!}{2!} + \binom{4}{1} \times \frac{3!}{2!} = \frac{5 \times 4}{2} \times 6 + 4 \times \frac{3 \times 2!}{2!} + 4 \times \frac{3 \times 2!}{2!} \\ = 60 + 12 + 12 = 84 \end{array}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۷

پاسخ تشریحی گام اول: تعداد کل حالت‌های ممکن برای نشستن ۸ نفر در یک ردیف برابر با $n(S) = 8!$ است.

گام دوم: حال پیشامد آن که هر فرد کنار همسر خود بنشینند را بررسی می‌کنیم. هر دو صندلی کنار هم را یک بسته در نظر می‌گیریم. ۴ زوج به $4!$ در این بسته‌ها قرار می‌گیرند. از طرفی هر زوج در هر بسته به $2!$ حالت جایگشت دارند، پس طبق اصل ضرب تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$n(A) = 4! \times 2! \times 2! \times 2! \times 2! = 4!(2!)^4$$

گام سوم: پس احتمال آن که هر فرد کنار همسر خود بنشینند برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4!(2!)^4}{8!} = \frac{4! \times 16}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!} = \frac{1}{105}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: اول تعداد کل اعداد ۷ رقمی بدون تکرار ارقام با ارقام داده شده را می‌شماریم: $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \times 6!$
گام دوم: حالا تعداد اعدادی را می‌شماریم که در آن‌ها دو رقم زوج یعنی ۴، ۶ در کنار هم باشند. برای این کار اعداد را به صورت $(9, 7, 5, 3, 1, 0, 4)$ بسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جایگشت‌های این بسته‌ها برابر است با:

$$\begin{array}{cc} 6! & \times & 2! \\ \text{بسته} & & \text{بسته} \\ \text{جایگشت} & & \text{جایگشت} \\ \text{بسته‌ها} & & 4, 6 \\ & & \text{درون بسته} \end{array}$$

گام سوم: دقت کنید همه اعداد به دست آمده، در گام قبل ۷ رقمی نیستند! جایگشت‌هایی که در آن‌ها بسته ۴، ۶ در سمت چپ و ترتیب ۴ و ۶ درون بسته به شکل ۴۶ است، نامطلوب‌اند که تعداد آن‌ها برابر است با:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 4 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ \hline & & & & & & \\ \hline \end{array} = 5!$$

جایگشت این اشیاء ثابت

گام چهارم: بنابراین $6! \times 2! - 5! = 720 - 120 = 600$ عدد ۷ رقمی داریم که در آن‌ها اعداد زوج در کنار یکدیگرند، پس تعداد اعداد ۷ رقمی که در آن هیچ دو عدد زوجی در کنار یکدیگر نیستند برابر است با: $600 - 600 = 0$

روش دوم: گام اول: برای اعداد فرد محدودیتی نداریم، پس ابتدا آن‌ها را به ۵! جایگشت در کنار هم قرار می‌دهیم:

○ فرد ○ فرد ○ فرد ○ فرد ○ فرد

گام دوم: در بین و طرفین این ۵ عدد فرد، ۶ جایگاه داریم. ابتدا رقم صفر را به ۵ حالت درون یکی از این ۶ جایگاه به جز جایگاه سمت چپ قرار می‌دهیم و (خوب چرا تو جایگاه سمت چپ نمی‌تونیم صفر رو قرار بدیم؟ چون این جوری دیگه عدد ۷ رقمی نمیشه!) مثلاً به شکل زیر:

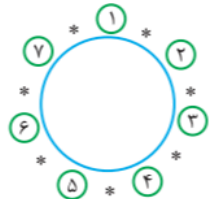
○ ۱ ○ ۳ ○ ۵ ○ ۷ ○ ۹ ○

گام سوم: ۵ جایگاه دیگر داریم که می‌توانیم عدد ۴ را به تصادف در یکی از آن‌ها قرار دهیم که با این کار، هیچ دو عدد زوجی در کنار هم قرار نمی‌گیرند، پس جواب برابر می‌شود با:

$$\begin{array}{ccccc} 5! & \times & 5 & \times & 5 \\ \text{بسته} & & \text{بسته} & & \text{بسته} \\ \text{جایگشت} & & \text{جایگاه} & & \text{جایگاه} \\ \text{اعداد} & & \text{صفر} & & 4 \\ \text{فرد} & & & & \end{array} = 5! \times 25$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: چون قرار است افراد دور یک میز بنشینند، ۴ فوتبالیست و ۳ والیبالیست، به $6! = (7-1)!$ حالت دور میز می‌توانند قرار بگیرند:



از آن جایی که نباید هیچ دو مربی در کنار هم قرار گیرند، جای مربیان، از (*) انتخاب می‌شود؛ پس $\binom{7}{3}$ جا انتخاب می‌کنیم.

گام دوم: از مکان‌های انتخاب شده برای مربیان، ۳ مربی می‌توانند به ۳! جایگشت داشته باشند.

گام سوم: پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$6! \times 3! \times \binom{7}{3} = 720 \times 6 \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 720 \times 210 = 151200$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

حالت اول: در کمیته، یک فرانسوی باشد: باید از بین ۵ ایرانی و ۳ ژاپنی، ۳ نفر انتخاب کنیم که حداقل یک نفر ایرانی باشد.

$$\text{راه حل اول: } \underbrace{\binom{5}{1}\binom{3}{2}}_{\text{یک ایرانی}} + \underbrace{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}_{\text{دو ایرانی}} + \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{سه ایرانی}} = 15 + 30 + 10 = 55$$

$$\text{راه حل دوم: } \text{حالاتی که ایرانی نباشد} - \text{کل حالات} = \binom{8}{3} - \binom{3}{3} = 56 - 1 = 55$$

حال تعداد حالات انتخاب یک فرانسوی یعنی $\binom{4}{1}$ را در این عدد ضرب می‌کنیم:

$$\binom{4}{1} \times 55 = 220$$

حالت دوم: در کمیته، هیچ فرانسوی‌ای نباشد: باید از بین ۵ ایرانی و ۳ ژاپنی، ۴ نفر انتخاب کرد که قطعاً حداقل یک ایرانی وجود خواهد داشت.

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!} = 70$$

$$\text{جواب مساله} = 220 + 70 = 290$$

با کمی دقت در می‌یابیم حالت‌های مطلوب طبق جدول روبه‌رو است:

ایرانی	فرانسوی	ژاپنی	تعداد حالات
۱	۱	۲	$\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{2} = 60$
۱	۰	۳	$\binom{5}{1}\binom{3}{3} = 5$
۲	۱	۱	$\binom{5}{2}\binom{4}{1}\binom{3}{1} = 120$
۲	۰	۲	$\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 30$
۳	۰	۱	$\binom{5}{3}\binom{3}{1} = 30$
۳	۱	۰	$\binom{5}{3}\binom{4}{1} = 40$
۴	۰	۰	$\binom{5}{4} = 5$

+ → 290

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

ابتدا تعداد اعدادی را حساب می‌کنیم که مضرب ۶ هستند. این اعداد باید دارای یکان ۲ بوده و مجموع ارقام آن‌ها مضرب ۳ باشد.

واضح است که در چهار رقم

$$n(A) = \binom{4}{2} = 6$$

باقی‌مانده دو رقم ۲ و دو رقم ۳ وجود دارد. بنابراین:

$$n(S) - n(A) = 2^5 - 6 = 26$$

تعداد اعدادی که مضرب ۶ نیستند برابر است با:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

६५

اگر شهناز در گروه باشد بهناز حضور نخواهد داشت، بنابراین دو نفر باقی مانده از میان ۵ نفر انتخاب خواهد شد:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 10$$

اگر بهناز در گروه باشد، مهناز و شهناز در گروه نخواهند بود، بنابراین دو نفر باقی مانده از میان ۴ نفر انتخاب می‌شوند.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$$

خواهیم داشت:

$$10 - 6 = 4$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{s} = \binom{n}{s}$$

طبق رابطه پاسکال داریم:

$$\binom{n}{\Delta} = \binom{n}{\epsilon} \Rightarrow n = \Delta + \epsilon = 11$$

بنابراین:

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r} + \binom{n+1}{r+1} = \binom{n+2}{r} = \frac{12!}{8!4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

خواهیم داشت:

(ما؛ ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

هزارگان اعداد مورد نظر ۲، ۳ و ۵ می باشند:

၆၃

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{6,1} = 2 \\ \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} \times \frac{3}{3,1,0} = 3 \\ \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{4}{5,3,0,1} \times \frac{3}{3} = 12 \\ \frac{1}{3} \times \frac{5}{5} \times \frac{4}{4} \times \frac{2}{2} = 60 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} 2 + 3 + 12 + 60 + 24 + 1 = 102$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

९५

نکته ۱: در شمارش گاهی اوقات برای ساده تر شدن مسئله، از روش متمم استفاده می کنیم بدین صورت که تعداد حالات نامطلوب را از کل حالات کم می کنیم تا تعداد حالات مطلوب به دست آید.

نکته ۲: تعداد حالت‌های انتخاب I شیء از میان n شیء متمایز که ترتیب انتخاب آن‌ها اهمیت ندارد را ترکیب I از n نامیده و با نمادهای

$$C(n, r) \text{ یا } \binom{n}{r} \text{ نمایش می دهیم که برابر است با: } (\cdot \leq r \leq n) \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

توصیف با توجه به نکته ۲، خواهیم داشت:

$$\text{انتخاب‌های فاقد کتاب ریاضی} - \text{کل انتخاب‌ها} = \text{تعداد حالات انتخاب حداقل یک کتاب ریاضی}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۶۶

ابتدا تعداد اعداد ۳ رقمی موردنظر را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{4}{\text{رقم ۱}} \times \frac{3}{\text{رقم ۲}} \times \frac{1}{\text{رقم ۳}} \text{ یا } \frac{3}{\text{رقم ۱}} \times \frac{3}{\text{رقم ۲}} \times \frac{1}{\text{رقم ۳}} \Rightarrow 12 + 9 = 21$$

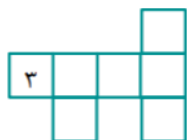
اکنون تعداد اعداد ۴ رقمی موردنظر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{4}{\text{رقم ۱}} \times \frac{3}{\text{رقم ۲}} \times \frac{2}{\text{رقم ۳}} \times \frac{1}{\text{رقم ۴}} \text{ یا } \frac{3}{\text{رقم ۱}} \times \frac{3}{\text{رقم ۲}} \times \frac{2}{\text{رقم ۳}} \times \frac{1}{\text{رقم ۴}} \Rightarrow 24 + 18 = 42$$

پس تعداد اعداد موردنظر طبق اصل جمع، برابر است با:

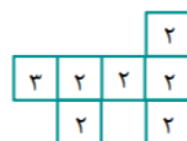
$$21 + 42 = 63$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)



۶۷

با اولین مربع سمت چپ شروع به رنگ‌آمیزی می‌کنیم. این مربع را می‌توان به سه حالت رنگ کرد.



واضح است بقیه مربع‌ها هر یک به دو حالت قابل رنگ‌آمیزی است.

$$\Rightarrow 3 \times 2^6 = 192$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۶۸

بهتر است ابتدا آن‌هایی که رقم ۲ ندارند را یافته و از کل کم کنیم:

$$9 \times 9 \times 8 \times 7 = \text{تعداد اعداد ۴ رقمی بدون تکرار ارقام}$$

$$8 \times 8 \times 7 \times 6 = \text{تعداد اعداد ۴ رقمی بدون رقم ۲ (بدون تکرار)}$$

$$9 \times 9 \times 8 \times 7 - 8 \times 8 \times 7 \times 6 = 8 \times 7 (81 - 48) = 56 \times 33 = 1848$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۶۹

هر تابع از A به A که شامل زوج مرتب (۲, ۲) باشد، به صورت $f = \{(1, a), (2, 2), (3, b), (4, c), (5, d)\}$ است که در آن a عضو مجموعه {۲, ۳, ۴, ۵} و b, c و d عضو مجموعه {۱, ۲, ۳, ۴, ۵} هستند.

بنابراین برای a، چهار حالت و برای هر کدام از b, c و d پنج حالت وجود دارد. پس تعداد تابع‌های موردنظر برابر است با:

$$4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500 = \text{جواب}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۰

سکه باید در پرتاب اول تا سوم پشت بیاید، پس در هر کدام از این پرتاب‌ها، ۱ حالت دارد. در پرتاب چهارم، سکه باید رو بیاید پس در این پرتاب نیز، ۱ حالت دارد. سکه در پرتاب‌های پنجم تا هشتم می‌تواند رو یا پشت بیاید پس در هر پرتاب، ۲ حالت دارد. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب طبق اصل ضرب، برابر

$$\text{جواب} = \underbrace{1 \times 1 \times 1}_{\text{پرتاب‌های پنجم تا هشتم}} \times \underbrace{1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{پرتاب چهارم}} = 16$$

پرتاب‌های اول تا سوم

است با:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۱

اعداد فرد: ابتدا تعداد حالات یکان، سپس هزارگان را مشخص می‌کنیم:

برای محاسبه اعداد زوج دو روش حل داریم:

روش اول:

$$\begin{array}{cccc} 4 \times 4 \times 3 \times 3 & = & 144 \\ \hline 1 & & 1 \\ 2 & & 5 \\ 5 & & 7 \\ 6 & & \\ 7 & & \end{array}$$

اعداد زوج: یکان عدد موردنظر باید زوج باشد، اگر صفر در یکان قرار گیرد هزارگان ۵ حالت و اگر ۲ یا ۶ قرار گیرد هزارگان ۴ حالت خواهد داشت.

$$\begin{array}{l} \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{cccc} 5 \times 4 \times 3 \times 1 & = & 60 \\ \hline & & 0 \\ 4 \times 4 \times 3 \times 2 & = & 96 \\ \hline & & 2 \\ & & 6 \end{array} \end{array} \quad \xrightarrow{+} \quad 60 + 96 = 156$$

روش دوم:

$$\text{تعداد اعداد زوج} = \text{تعداد اعداد فرد} - \text{تعداد کل اعداد} = (5 \times 5 \times 4 \times 3) - (4 \times 4 \times 3 \times 3) = 300 - 144 = 156$$

$$\text{اختلاف زوج و فرد} = 156 - 144 = 12$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۲

تعداد جایگشت‌هایی از حروف کلمه today که در آن ۲ حرف t و d کنار هم هستند، را محاسبه می‌کنیم:

$$a, \boxed{d, t}, y, o \Rightarrow 4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$$

تعداد جایگشت‌هایی از حروف کلمه today که در آن حرف t و d کنار هم و حروف a و y نیز کنار هم باشند، برابر است با:

$$\boxed{a, y}, o, \boxed{t, d} \Rightarrow 3! \times 2! \times 2! = 24$$

طبق اصل متمم، تعداد جایگشت‌هایی از حروف کلمه today که در آن ۲ حرف t و d کنار هم باشند ولی حروف a و y کنار هم نباشند، برابر است با:

$$48 - 24 = 24 = \text{جواب}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۳

$${}_3p(n, 2) = {}_5p(n-1, 2) \Rightarrow 3 \times \frac{n!}{(n-2)!} = 5 \times \frac{(n-1)!}{(n-1-2)!} \Rightarrow 3 \times \frac{n(n-1) \times \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 5 \times \frac{(n-1) \times (n-2) \times \cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}}$$

$$\Rightarrow 3n(n-1) = 5(n-1) \times (n-2) \Rightarrow \begin{cases} n-1=0 \Rightarrow n=1 \text{ غقی} \\ 3n = 5(n-2) \Rightarrow 5n-10=3n \Rightarrow 2n=10 \Rightarrow n=5 \text{ قق} \end{cases}$$

$$p(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$$

پس حاصل $p(n, 3)$ به ازای $n=5$ برابر است با:

می‌توانستیم معادله را به روش دیگری حل کنیم مثلاً صورت ۲ کسر را با هم و مخرج ۲ کسر را نیز با هم در ۲ طرف تساوی ساده کنیم و بعد معادله را حل کنیم.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۴

ابتدا حرف m را به چهار حالت در یکی از چهارخانه قرار می‌دهیم:

سپس در سه خانه دیگر، باید ۳ تا از ۷ حرف h, i, r, a, g, o, l قرار بگیرد که این کار نیز به $p(7, 3)$ حالت امکان‌پذیر است. پس تعداد جایگشت‌های

$$4 \times p(7, 3) = 4 \times \frac{7!}{(7-3)!} = 4 \times \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

مطلوب برابر است با:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۵

در زیرمجموعه مورد نظر یا ۱ عدد زوج یا ۲ عدد زوج و یا ۳ عدد زوج موجود است:

$$\binom{3}{1}\binom{4}{2} + \binom{3}{2}\binom{4}{1} + \binom{3}{3} = 18 + 12 + 1 = 31$$

روش دوم:

روش متمم:

تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی که همه اعضای آن فرد باشند - تعداد کل زیرمجموعه‌های سه عضوی

$$= \binom{7}{3} - \binom{4}{3} = 35 - 4 = 31$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۶

قرار است دانش‌آموزان تجربی کنار هم نباشند، در واقع از دانش‌آموزان ریاضی به عنوان مانع استفاده می‌کنیم. ابتدا موانع را جایگزین می‌کنیم:

O R O R O R O R O

از بین ۵ جایگاه موجود، ۳ جایگاه را انتخاب کرده و به دانش‌آموزان تجربی اختصاص می‌دهیم و سپس آن‌ها را با هم جایگشت می‌دهیم:

$$\binom{5}{3} \times 3! \times 4! = \frac{5!}{3! \times 2!} \times 3! \times 4! = \frac{5! \times 4!}{2!}$$

جایگشت ریاضی‌ها جایگشت تجربی‌ها

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۷

حالت اول ۱ هندی عضو کمیته باشد: از بین ۴ ایرانی و ۳ آلمانی باید ۳ نفر انتخاب کنیم که حداقل ۱ نفر ایرانی باشد:

$$\text{راه حل اول: } \underbrace{\binom{4}{1}\binom{3}{2}}_{\text{ایرانی ۱}} + \underbrace{\binom{4}{2}\binom{3}{1}}_{\text{ایرانی ۲}} + \underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{ایرانی ۳}} = 12 + 18 + 4 = 34$$

$$\text{راه حل دوم: } \binom{7}{3} - \binom{3}{3} = 35 - 1 = 34 \quad \text{ایرانی نباشد - کل حالات}$$

$$\binom{2}{1} \times 34 = 68 \quad \text{حال تعداد حالات انتخاب ۱ هندی یعنی } \binom{2}{1} \text{ را در این عدد ضرب می‌کنیم:}$$

$$\binom{7}{4} = 35 \quad \text{حالت دوم) هیچ هندی، عضو کمیته نباشد: از بین ۴ ایرانی و ۳ آلمانی باید ۴ نفر انتخاب کنیم که قطعاً، حداقل ۱ نفر ایرانی است.}$$

$$\Rightarrow \text{پاسخ مسئله: } 68 + 35 = 103$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۸

$$\frac{2!}{(1)} \times \frac{\binom{6}{2}}{(2)} \times \frac{2!}{(3)} \times \frac{5!}{(4)} = 60 \times 5! = 10 \times 6!$$

(۱) جابه‌جایی ۲ حرف ۲! حالت دارد.

(۲) انتخاب ۲ عدد که بین ۲ حرف قرار می‌گیرند $\binom{6}{2}$ حالت دارد.

(۳) جابه‌جایی ۲ عدد که بین ۲ حرف قرار می‌گیرند ۲! حالت دارد.

(۴) حالت‌های انتخاب و جابه‌جایی ۲ حرف و اعداد بین آن‌ها را در (۱) و (۲) و (۳) حساب کردیم.

این ۴ شیء را در یک بسته در نظر می‌گیریم، به همراه ۴ رقم دیگر ۵ شیء هستند که جابه‌جایی آن‌ها ۵! حالت دارد.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۹

تعداد سه ضلعی‌ها $\binom{8}{3}$ و تعداد چهارضلعی‌ها $\binom{8}{4}$ و به همین ترتیب تا تعداد هشت ضلعی‌ها که $\binom{8}{8}$ است، یعنی:

$$\binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \dots + \binom{8}{8}$$

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \dots + \binom{8}{8} = 2^8$$

از طرفی:

بنابراین:

$$\binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \dots + \binom{8}{8} = 2^8 - \binom{8}{0} - \binom{8}{1} - \binom{8}{2} = 256 - 1 - 8 - 28 = 219$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$\binom{3}{2} 2! = 6$$

یکان و دهگان آن را از بین اعداد $\{1, 4, 9\}$ انتخاب می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 77654 \\ \downarrow \end{array} \boxed{} = 35280$$

صفر نمی‌تواند باشد

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۱

چون e ها باید کنارهم باشند، آن‌ها را در یک بسته قرار می‌دهیم و سپس "s" ها را می‌چینیم.

-s-s-s-s-

سپس از بین دو خانه اول و آخر، یکی را به e ها اختصاص می‌دهیم و حروف باقی‌مانده (m و t و a و n) را در جایگاه‌های باقی‌مانده جایگشت می‌دهیم (توجه داشته باشید که بسته e ها فقط می‌توانند در جایگاه اول و آخر باشند چرا که در غیر این صورت s ها یک در میان نخواهند بود)

بنابراین تعداد حالت‌ها برابر است با:

جایگشت حروف (m و t و a و n)

$$2 \times 4! = 48$$

جایگاه اول و آخر برای بسته e ها

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۲

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر $\binom{10}{5}$ می‌باشد.

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{\cancel{10} \times \cancel{9} \times \cancel{8} \times \cancel{7} \times \cancel{6}}{\cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 4 \times 9 \times 7$$

تعداد اعضای پیشامد تصادفی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\binom{4}{3} \binom{6}{2} + \binom{4}{4} \binom{6}{1} = 4 \times 15 + 1 \times 6 = 66$$

۳ تجربی
۴ تجربی
۱ غیر تجربی
۲ غیر تجربی

$$P = \frac{66}{4 \times 9 \times 7} = \frac{11}{2 \times 3 \times 7} = \frac{11}{42}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

برای جایزه اول ۷ انتخاب، برای جایزه دوم ۶ انتخاب و ... برای جایزه پنجم ۳ انتخاب داریم:

۸۳

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

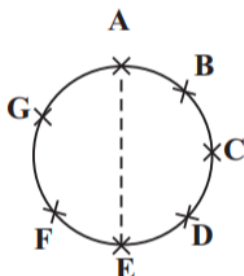
۸۴

تعداد حالاتی که دو ادویه باهم - تعداد کل حالات = تعداد حالاتی که دو ادویه باهم استفاده نشوند

$$= \frac{10!}{(10-3)!3!} - \frac{8!}{(8-1)!1!} = 120 - 8 = 112$$

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$\Rightarrow \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 6$$



(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

اگر AE بخواند قطر باشد، دو رأس دیگر یکی شان باید از بین B,C,D باشد و دیگری از بین G,F:

۸۵

برای اینکه هیچ دو دختری کنار هم نباشند، باید بین پسرها و دو طرف ردیف قرار گیرند.

۸۶

$$- \textcircled{پ} - \textcircled{پ} - \textcircled{پ} - \textcircled{پ} - \textcircled{پ} -$$

پسرها ۵ حالت دارند: ۵!

$$3 \text{ دختر باید در } 6 \text{ خانه مشخص شده قرار گیرند: } \binom{6}{3} \times 3! = 120 \times 20 \times 6 = 14400$$

بنابراین داریم:

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

پله اول: تعداد کل افراد گروه برابر $4 + 4 + 3 = 11$ می باشند.

۸۷

حال پیشامد حالت‌هایی که میانگین ۴ تای آن‌ها برابر ۲۰ می شود را می نویسیم:

(یک نفر ۱۹ ساله و ۲ نفر ۲۰ ساله و یک نفر ۲۱ ساله) یا (۲ نفر ۱۹ ساله و ۲ نفر ۲۱ ساله) یا (۴ نفر ۲۰ ساله)

پله دوم: تعداد حالت‌ها را محاسبه می کنیم:

$$\binom{4}{4} + \binom{4}{2} \binom{3}{2} + \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{3}{1} = 1 + 18 + 72 = 91$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

برای آنکه اعداد زوج و فرد کنار هم قرار نگیرند، باید یکی از حالت‌های زیر اتفاق بیفتد:

۸۸

$$\text{زوج} \quad \text{زوج} \quad \text{زوج} \Rightarrow 5 \times 4 \times 3 = 60$$

$$\Rightarrow 60 + 60 = 120$$

$$\text{فرد} \quad \text{فرد} \quad \text{فرد} \Rightarrow 5 \times 4 \times 3 = 60$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۹

روش اول: ابتدا جایگشت همه حروف را محاسبه می‌کنیم. توجه کنید به دلیل وجود ۲ حرف S، باید جواب را بر ۲! تقسیم کنیم: $\frac{6!}{2!}$
 حالا برای جلوگیری از جایگشت حروف Y,T,E,M جواب را بر ۴! تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\left(\frac{6!}{2!}\right)}{4!} = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

-T-E-M-Y-

روش دوم: ابتدا حروف T,E,M,Y را قرار داده و بین آنها حروف S را قرار می‌دهیم.

$$\binom{5}{2} = 10$$

انتخاب ۲ مکان از بین ۵ مکان برای حروف S:

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۰

ابتدا با استفاده از اصل ضرب تعداد همه اعداد هفت رقمی را با شرایط گفته شده به دست می‌آوریم، (صفر نمی‌تواند در رقم اول باشد) سپس بر ۲! تقسیم می‌کنیم تا تعداد اعدادی که رقم ۴ در سمت چپ رقم ۶ قرار می‌گیرد به دست آید:

$$\underbrace{\text{○○○○○○○}}_{\text{ارقام ۰,۱,۴,۵,۶,۷}} \Rightarrow \frac{5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2!} = 300$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۱

بین حروف بی صدا جا باز می‌کنیم سپس دو حرف از سه حرف صدادار {U,I,O} انتخاب می‌کنیم و آن‌ها را در یک بسته قرار می‌دهیم. سپس ۲ جایگاه خالی از ۶ جایگاه موجود را انتخاب می‌کنیم و بسته و حرف صدادار تنها را در آنها قرار می‌دهیم:

— F — UI — N — C — O — T — N —

جایگشت بسته و حرف بیرونی

$$\Rightarrow \binom{6}{2} \times 3 \times 2! \times 2! \times \frac{5!}{2!} = 15 \times 3 \times 2 \times 2 \times 120 = 10800$$

جایگشت بی صداها

یکی از حروف صدادار تنها باشد

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۲

برای این که شامل سه حرف نقطه‌دار باشد، باید حرف "ی" در آخر کلمه نیاید. پس ابتدا تعداد کلمات ۶ حرفی که حرف آخر آنها ی است را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{5!}{2!}$$

حال کل کلمات ۶ حرفی را منهای تعداد حالت‌هایی می‌کنیم که حرف "ی" در آخر کلمه است:

$$\frac{6!}{2!2!} - \frac{5!}{2!} = \frac{3}{2} \times 5! - \frac{1}{2} \times 5! = 5! = 120$$

جایگشت دو حرف (ی) جایگشت دو حرف (الف)

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۳

برای این که به هر نفر حداقل یک جایزه برسد، باید تعداد جایزه‌هایی که بین افراد پخش می‌شود به صورت زیر باشد:

حالت ۱: به یک نفر ۳ جایزه برسد.

$$\boxed{3 \quad 1 \quad 1 \quad 1} \Rightarrow \frac{4!}{3!} \times \binom{6}{3} \binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{1}{1} = 4 \times 120 = 480$$

حالت ۲: به دو نفر ۲ جایزه برسد

$$\boxed{2 \quad 1 \quad 1 \quad 2} \Rightarrow \frac{4!}{2!2!} \times \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{3}{1} \binom{2}{2} = 6 \times 15 \times 4 \times 3 \times 1 = 1080$$

پس تعداد کل حالات برابر $480 + 1080 = 1560$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۴

اگر کتاب اول و وسط ریاضی باشد، کتاب آخر باید یکی از ۴ کتاب زیست یا ۲ کتاب شیمی باشد، پس ۶ حالت دارد و بقیه کتاب‌ها می‌توانند ۶ جایگشت کنند.

اول: ریاضی وسط: ریاضی آخر: $\Rightarrow (3 \times 2 \times 6 \times 6!) \times 2$

مشابه همین تحلیل، برای زیست و شیمی هم خواهیم داشت:

اول: زیست وسط: زیست آخر: $\Rightarrow (4 \times 3 \times 5 \times 6!) \times 2$

اول: شیمی وسط: شیمی آخر: $\Rightarrow (2 \times 1 \times 7 \times 6!) \times 2$

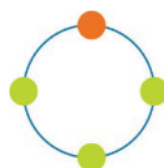
پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$\Rightarrow (36 \times 6! + 60 \times 6! + 14 \times 6!) \times 2 = 220 \times 6!$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۵

ابتدا ۳ پسر از بین ۵ پسر و ۱ دختر از بین ۴ دختر انتخاب می‌کنیم و سپس جایگشت دوری این ۴ نفر را محاسبه می‌کنیم:



$$\Rightarrow \binom{5}{3} \binom{4}{1} \times (4-1)! = 10 \times 4 \times 6 = 240$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۶

پیشامد «انتخاب حداقل یک عدد فرد» از مجموعه $\{1, 2, \dots, 10\}$ متمم حالتی است که هر دو عدد انتخاب شده زوج باشند. در این مجموعه ۵ عدد زوج داریم، پس:

$$n(A) = \binom{10}{2} - \binom{5}{2} = 45 - 10 = 35$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۷

عدد ۵ نمی‌تواند در یکان قرار بگیرد، پس ۲ حالت برای رقم یکان داریم. عدد صفر نمی‌تواند در رقم صدگان قرار بگیرد و چون تکرار ارقام مجاز نیست، پس ۴ حالت برای رقم صدگان داریم و در نهایت ۴ حالت برای رقم دهگان باقی می‌ماند.

$$\frac{4}{\circ \times} \frac{4}{7, \text{ عدد}} \frac{2}{\text{عدد}} \quad 4 \times 4 \times 2 = 32$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۸

نکته: به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیرمجموعه r عضوی از یک مجموعه n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم که آن را با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

نکته (اصل ضرب): اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد به طوری که برای انجام مرحله اول m روش وجود داشته باشد و برای هر کدام از این روش، مرحله دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار موردنظر به $m \times n$ روش قابل انجام است.

برای این منظور باید ۳ نفر از دهم، ۱ نفر از یازدهم و ۱ نفر از دوازدهم انتخاب شوند (طبق فرض سؤال بیشتر اعضای تیم، کلاس دهمی هستند) و طبق اصل ضرب داریم:

$$\binom{7}{3} \times \binom{5}{1} \times \binom{3}{1} = \frac{7!}{4!3!} \times 5 \times 3 = 7 \times 5 \times 5 \times 3 = 525$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۹

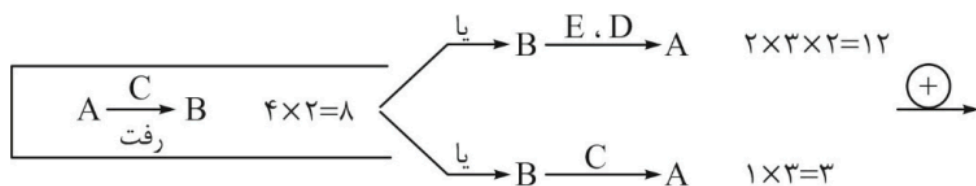
نکته: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با: $n!$

تعداد حالت‌های قرار گرفتن حروف کلمه «فارس» در کنار هم برابر با تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز یعنی $4!$ است. اکنون این چهار حرف را یک حرف در نظر می‌گیریم که با چهار حرف دیگر، پنج حرف تشکیل می‌دهند. تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز برابر با $5!$ است. طبق اصل ضرب، جواب برابر است با:

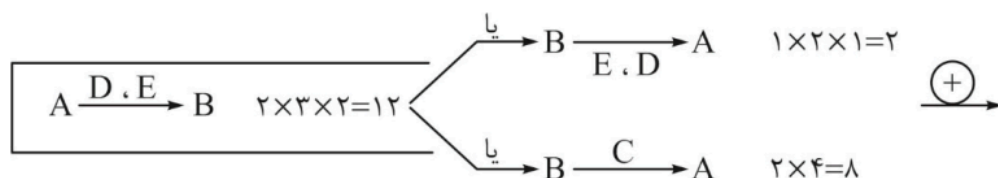
$$4! \times 5! = \overbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}^6 \times 5! = 4 \times 6!$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۰



$$8 \times (12 + 3) = 8 \times 15 = 120 \quad (1)$$



$$12 \times (2 + 8) = 12 \times 10 = 120 \quad (2)$$

$$(1) + (2) = 120 + 120 = 240$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۱

ابتدا اعداد سه رقمی با ارقام غیر تکراری بزرگتر از ۲۰۰ و مضرب ۵ را به دست می آوریم. اگر رقم یکان برابر صفر باشد، رقم صدگان باید از ارقام {۲, ۳, ۴, ۵, ۶} انتخاب شود، پس تعداد اعداد برابر $5 \times 5 \times 1 = 25$ است. اگر رقم یکان برابر ۵ باشد، رقم صدگان باید از ارقام {۲, ۳, ۴, ۶} انتخاب شود و تعداد اعداد برابر $4 \times 5 \times 1 = 20$ می باشد. از طرفی باید عدد ۲۰۵ را کنار بگذاریم. بنابراین تعداد اعداد برابر است با:

$$25 + 20 - 1 = 44$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۲

برای حل مسأله ابتدا فرض می کنیم که b عددی فرد باشد در نتیجه $b+2$ نیز فرد خواهد بود:

$$\text{تعداد عددهای ۴ رقمی زوج} = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{60}{2} = 30 \Rightarrow \text{تعداد عددهای ۴ رقمی زوج} = 108$$

$$\text{تعداد عددهای ۳ رقمی فرد} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}}{1, 3, b, b+2} = \frac{64}{1, 3, b, b+2} \Rightarrow \text{تعداد عددهای ۳ رقمی فرد} = 64$$

که نسبت تعداد عددهای ۴ رقمی زوج به عددهای سه رقمی فرد برابر با $\frac{51}{8}$ نمی باشد بنابراین b و $b+2$ عددی زوج هستند، بنابراین:

$$\text{تعداد عددهای ۴ رقمی زوج} = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}} = \frac{60}{2} = 30 \Rightarrow \text{تعداد عددهای ۴ رقمی زوج} = 204$$

$$\text{تعداد عددهای ۳ رقمی فرد} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}}{1, 3} = \frac{32}{1, 3} = 32 \Rightarrow \text{تعداد عددهای ۳ رقمی فرد} = 32$$

بنابراین با در نظر گرفتن $b=6$ بزرگترین عدد چهار رقمی فرد به صورت ۸۶۲۳ خواهد بود که مجموع ارقام آن برابر با ۱۹ می باشد.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۳

تعداد کلمات ۴ حرفی که با n حرف می توان نوشت به صورت زیر است:

$$\underline{n} \quad \underline{n-1} \quad \underline{n-2} \quad \underline{n-3} = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

تعداد کلمات ۲ حرفی نیز برابر است با:

$$\underline{n} \quad \underline{n-1} = n(n-1)$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n-1)} = 12 \Rightarrow (n-2)(n-3) = 12$$

$$\Rightarrow n^2 - 5n + 6 = 12 \Rightarrow n^2 - 5n - 6 = 0 \Rightarrow (n-6)(n+1) = 0$$

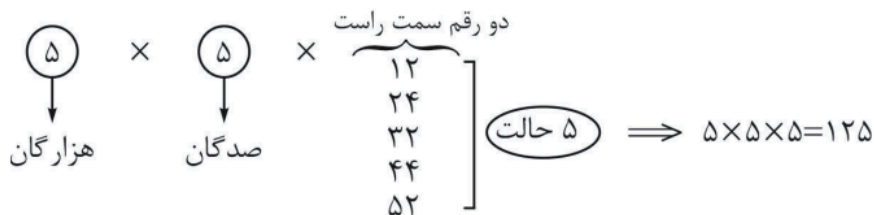
$$\Rightarrow \begin{cases} n=6 & \text{قق} \\ n=-1 & \text{غقق} \end{cases}$$

$$\text{تعداد کلمات سه حرفی} = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۴

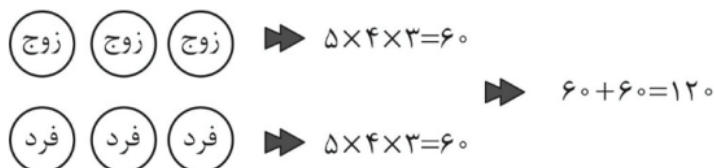
اعدادی بر ۴ بخش پذیرند که دو رقم سمت راست آنها (یکان و دهگان آنها) بر ۴ بخش پذیر باشد، مثلاً سمت راست عدد ۱۲ یا ۲۴ یا... باشد، بنابراین ابتدا حالتی که بخش پذیری بر ۴ را ایجاد می کنند، شمارش می کنیم، با توجه به ارقام داده شده در صورت مسأله دو رقم سمت راست می تواند ۱۲، ۲۴، ۳۲، ۴۴، ۵۲ باشد یعنی ۵ حالت. اکنون به ازای هر نتیجه از حالات گفته شده در هزارگان ۵ حالت و به ازای هر نتیجه از دو رقم اول و هزارگان مجدداً ۵ حالت در صدگان خواهیم داشت، بنابراین تعداد حالات به صورت مقابل است.



(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۵

برای آن که اعداد زوج و فرد کنار هم قرار نگیرند، باید یکی از حالت های زیر اتفاق بیفتد:



(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۶

$$\left. \begin{array}{l} \text{تعداد سوالات چهارگزینه ای} = x \\ \text{تعداد سوالات دوگزینه ای} = y \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + y = 9 \\ x = 2y \end{array} \rightarrow 3y = 9 \rightarrow y = 3 \rightarrow x = 6$$

پس این آزمون ۶ سؤال چهار گزینه ای و ۳ سؤال دو گزینه ای دارد.

چون پاسخ دادن به سوالات الزامی نیست، هر سؤال چهار گزینه ای ۵ حالت و هر سؤال دو گزینه ای، ۳ حالت دارد. پس:

$$5^6 \times 3^3 = 5^3 \times 5^3 \times 3^3 = 75^3$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۷

۶! = کل کلمات ۶ حرفی

$$\text{جواب مسئله} = 6! - (4! \times 2!) = 720 - 48 = 672$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۸

برای اینکه میانگین ارقام با یکی از ارقام برابر باشد باید ارقام، تشکیل دنباله حسابی بدهند، بنابراین حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

حالت اول: ارقام تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت $(d=1)$ بدهند:

$$2 \times 1 \times 1 = 2 \quad 1 \rightarrow 2 \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1, 2, 0: \text{رقم یکان عدد صفر باشد}$$

$$\text{رقم یکان عدد } 2 \text{ باشد: } \begin{cases} 0, 1, 2 \rightarrow \underline{1} \quad \underline{1} \quad \underline{1} \rightarrow 1 \times 1 \times 1 = 1 \\ \text{عدد } 2 \\ 1, 3, 2 \rightarrow \underline{2} \quad \underline{1} \quad \underline{1} \rightarrow 2 \times 1 \times 1 = 2 \\ \text{عدد } 2 \\ 4, 3, 2 \rightarrow \underline{2} \quad \underline{1} \quad \underline{1} \rightarrow 2 \times 1 \times 1 = 2 \\ \text{عدد } 2 \end{cases}$$

$$\text{رقم یکان عدد } 4 \text{ باشد: } \begin{cases} 2, 3, 4 \rightarrow \underline{2} \quad \underline{1} \quad \underline{1} \rightarrow 2 \times 1 \times 1 = 2 \\ \text{عدد } 4 \\ 3, 5, 4 \rightarrow \underline{2} \quad \underline{1} \quad \underline{1} \rightarrow 2 \times 1 \times 1 = 2 \\ \text{عدد } 2 \end{cases}$$

حالت دوم: ارقام تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت $(d=2)$ بدهند:

$$d=2 \rightarrow 0, 2, 4 \rightarrow \begin{cases} \text{یکان صفر باشد} \rightarrow \underline{2} \quad \underline{1} \quad \underline{1} \rightarrow 2 \times 1 \times 1 = 2 \\ \text{عدد } 0 \\ \text{یکان صفر نباشد} \rightarrow \underline{1} \quad \underline{1} \quad \underline{2} \rightarrow 1 \times 1 \times 2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{تعداد اعداد} = 2 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 15$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۹

$7! \times 2! \Rightarrow$ ب ا ت ک ه س ق ف $\Rightarrow$ تعداد کلمات ۸ حرفی که در آنها حروف "ق" و "ف" کنار هم هستند.

$$P(4,2) = \frac{4!}{2!} = 12 \Rightarrow \text{تعداد کلمات ۶ حرفی که به «کتاب» ختم می‌شوند.}$$

$$\text{جواب مسئله} = \frac{7! \times 2!}{12} = \frac{7!}{6} = \frac{7 \times \cancel{6} \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{\cancel{6}} = 7 \times 5!$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۰

برای این که هر نفر حداقل یک هدیه دریافت کند باید تعداد هدیه‌هایی که به افراد می‌رسد، به صورت زیر باشد:

حالت ۱: به یک نفر ۴ هدیه برسد.

$$\boxed{4 \ 1 \ 1 \ 1} \rightarrow \frac{4!}{3!} \times \binom{7}{4} \binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{1}{1} = 4 \times 35 \times 3 \times 2 \times 1 = 840$$

حالت ۲: به یک نفر ۳ هدیه و به یک نفر ۲ هدیه برسد.

$$\boxed{3 \ 2 \ 1 \ 1} \rightarrow \frac{4!}{2!} \times \binom{7}{3} \binom{4}{2} \binom{2}{1} \binom{1}{1} = 12 \times 35 \times 6 \times 2 \times 1 = 5040$$

حالت ۳: به ۳ نفر ۲ هدیه برسد.

$$\boxed{2 \ 2 \ 2 \ 1} \rightarrow \frac{4!}{3!} \times \binom{7}{2} \binom{5}{2} \binom{3}{2} \binom{1}{1} = 4 \times 21 \times 10 \times 3 \times 1 = 2520$$

$$840 + 5040 + 2520 = 8400 = 70 \times 120 = 70 \times 5! = m \times n!$$

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$\rightarrow \begin{cases} 8400 = 70 \times 5! \rightarrow m = 70, n = 5 \rightarrow m + n = 75 & \min \\ 8400 = 350 \times 4! \rightarrow m = 350, n = 4 \rightarrow m + n = 354 \\ 8400 = 1400 \times 3! \rightarrow m = 1400, n = 3 \rightarrow m + n = 1403 \\ 8400 = 4200 \times 2! \rightarrow m = 4200, n = 2 \rightarrow m + n = 4202 \\ 8400 = 8400 \times 1! \rightarrow m = 8400, n = 1 \rightarrow m + n = 8401 & \max \end{cases}$$

$m + n = 8326$ = اختلاف بیشترین و کمترین مقدار

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۱

با توجه به اینکه در کلمه‌ی «دفترچه آموزش» ۵ حرف نقطه دارد و ۶ حرف بدون نقطه وجود دارد، بنابراین داریم:

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 \\ \hline \text{بدون نقطه} & \text{بانقطه} & \text{بدون نقطه} & \text{بانقطه} & \text{بدون نقطه} & \text{بانقطه} & \text{بدون نقطه} \end{array}$$

$$\text{تعداد کلمات ۷ حرفی} = (6 \times 5 \times 5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3) = (6 \times 5 \times 4 \times 3) \times (5 \times 4 \times 3)$$

$$= \left(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times \frac{2}{2} \right) \times \left(5 \times 4 \times 3 \times \frac{2}{2} \right) = \frac{6!}{2} \times \frac{5!}{2} = \frac{1}{4} \times 6! \times 5!$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۲

اعداد $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ بر روی تاس تصور کنید. اکنون از بین جایگاه‌ها یک جایگاه انتخاب می‌کنیم و یکی از اعداد را در آن قرار می‌دهیم.

$$\underbrace{\binom{6}{1}}_{\text{جایگاه}} \times \underbrace{6}_{\text{ارقام}} = 36$$

اکنون دو جایگاه دیگر انتخاب می‌کنیم و دو عدد دیگر در آن‌ها قرار می‌دهیم.

$$\underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{جایگاه}} \times \underbrace{5}_{\text{ارقام}} = 50$$

اکنون در سه جایگاه دیگر، اعداد دیگر را قرار می‌دهیم.

$$\binom{3}{3} \times 4 = 4$$

پس کل حالات برابر است با $36 \times 50 \times 4 = 7200$.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۳

$$۱۲ = ۳ + ۵ + ۴ = \text{تعداد کل نقاط}$$

$$\text{تعداد کل انتخاب‌های ۳ رأس} = \binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲!}{۹! \times ۳!} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰}{۶} = ۲۲۰$$

$$۱۵ = ۱ + ۱۰ + ۴ = \binom{۳}{۳} + \binom{۵}{۳} + \binom{۴}{۳} : \text{در حالت‌هایی که ۳ نقطه روی یک خط باشند مثلث ساخته نمی‌شود.}$$

$$۲۰۵ = ۲۲۰ - ۱۵ = \text{تعداد کل مثلث‌ها}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۴

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{عضوی ۳}} \text{شامل ۴: } \{۴, \dots, \dots\} \rightarrow \binom{۴}{۲} = ۶ \\ \xrightarrow{\text{عضوی ۴}} \text{شامل ۴: } \{۴, \dots, \dots, \dots\} \rightarrow \binom{۴}{۳} = ۴ \\ \xrightarrow{\text{عضوی ۵}} \text{شامل ۴: } \{۴, \dots, \dots, \dots, \dots\} \rightarrow \binom{۴}{۴} = ۱ \end{array} \right. \rightarrow ۶ + ۴ + ۱ = ۱۱$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۵

عدد ۵ نمی‌تواند در یکان قرار بگیرد، پس ۲ حالت برای رقم یکان داریم. عدد صفر نمی‌تواند در رقم صدگان قرار بگیرد و چون تکرار ارقام مجاز نیست، پس ۴ حالت برای رقم صدگان داریم و در نهایت ۴ حالت برای رقم دهگان باقی می‌ماند.

$$\frac{۴}{۰ \times} \frac{۴}{۷, ۱ \text{ عدد}} \frac{۲}{\text{عدد}} \quad ۴ \times ۴ \times ۲ = ۳۲$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۶

ابتدا از بین ۶ جفت یک جفت انتخاب می‌کنیم، تا تنها جفت کتاب سوال به همراه پاسخ خودش باشد سپس از ۵ جفت باقی‌مانده دو جفت انتخاب کرده و از هر کدام از آنها یک کتاب انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۶}{۱} \binom{۵}{۱} \binom{۲}{۱} \binom{۲}{۱} = ۲۴۰$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۷

حالات نامطلوب - حالات کل = حالت مطلوب

$$\text{کل} = ۲^۷ = ۱۲۸$$

حضور یا عدم حضور هریک از ۷ عضو مجموعه ۲ حالت دارد:

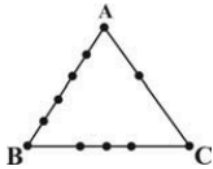
در کل ۲ فرد و ۵ زوج داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \binom{۲}{۲} = ۱ : \text{هیچ زوج و ۲ فرد} \\ \binom{۲}{۱} \binom{۵}{۱} = ۵ : \text{یک زوج و ۲ فرد} \\ \binom{۲}{۰} = ۲ : \text{هیچ زوج و ۲ فرد} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جمع}} ۱ + ۲ + ۵ = ۸ \Rightarrow \text{حالت مطلوب} = ۱۲۸ - ۸ = ۱۲۰$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۸

از بین ۱۱ نقطه به $\binom{11}{3} = ۱۶۵$ حالت می‌توان سه نقطه انتخاب کرد. تعداد حالات نامطلوب برای تشکیل مثلث به صورت زیر هستند:



الف) سه نقطه روی ضلع **AB** باشد:

$$\binom{6}{3} = ۲۰$$

ب) سه نقطه روی ضلع **BC** باشد:

$$\binom{5}{3} = ۱۰$$

ج) سه نقطه روی ضلع **AC** باشد:

$$\binom{3}{3} = ۱$$

در نتیجه تعداد مثلث‌های ساخته شده با انتخاب سه نقطه، برابر می‌شود با:

$$۱۶۵ - (۲۰ + ۱۰ + ۱) = ۱۳۴$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۹

اگر از ۲ و ۳ هر کدام حداقل ۵ تا داشتیم به تعداد $۳۲ = ۲^۵$ عدد می‌توان نوشت ولی حالت‌های زیر را نداریم:

$$\begin{cases} \text{یکی} \rightarrow ۲, ۲, ۲, ۲, ۲ \\ \text{تا ۵} \rightarrow ۲, ۲, ۲, ۲, ۳ \\ \text{یکی} \rightarrow ۳, ۳, ۳, ۳, ۳ \end{cases}$$

یعنی از این ۳۲ حالت، ۷ تا را نمی‌توانیم بنویسیم و بنابراین $۳۲ - ۷ = ۲۵$ عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۰

ابتدا باید حالت‌بندی کنیم:

حالت اول) بدون حرف تکراری:

$$\text{حالت دوم) با دو حرف تکراری ((الف): دو تا A و یکی غیر از A, (ب): دو تا D و یکی غیر از D) پس: } ۲((\binom{۲}{۲}) \times (\binom{۴}{۱})) \times \frac{۳!}{۲!} = ۲۴$$

حالت سوم) ۳ حرف تکراری (فقط با AAA) که یک حالت است.

پس جمع کل حالت‌ها برابر $۸۵ = ۶۰ + ۲۴ + ۱$ خواهد بود.

D A M R N

D A

A

$$(\binom{۵}{۲}) \times ۳! = ۶۰$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۱

برای اینکه بخواهیم ۵ ضلعی‌هایی رسم کنیم که **AD** یک قطر آن باشد بایستی ۲ نقطه از $\{B, C\}$ و ۱ نقطه از $\{H, G, F, E\}$ یا ۱ نقطه از $\{B, C\}$ و ۲ نقطه از $\{H, G, F, E\}$ انتخاب کنیم یعنی $۱۶ = ۴ + ۱۲ = (\binom{۴}{۲}) + (\binom{۲}{۱})(\binom{۴}{۱})$.

برای اینکه بخواهیم ۵ ضلعی‌هایی رسم کنیم که **AD** یک ضلع آن باشد فقط می‌توانیم ۳ نقطه از $\{H, G, F, E\}$ انتخاب کنیم یعنی: $۴ = (\binom{۴}{۳})$.

$$\text{مجموع حالات: } ۲ + ۱۳ + ۱۰ = ۲۵$$

$$\text{جواب آخر: } \frac{۱۶}{۴} = ۴$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۲

حروفی که داریم شامل **OO - NN - II - C - T - D** هستند. دو حالت داریم:

(۱) هیچ حرف تکراری نداریم.

برای حساب کردن تعداد این حالت، کافیه ۳ حرف از ۶ حرف انتخاب کنیم:

(۲) یک حرف تکراری داریم.

$$\binom{۶}{۳} \times \frac{۳!}{۱!} = ۲۰ \times ۶ = ۱۲۰$$

برای حساب کردن تعداد این حالت، ابتدا یک حرف از حروف **N** و **I** و **O** انتخاب می‌کنیم که تکراری باشد و سپس یک حرف از حروف باقی مانده

انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۳}{۱} \binom{۵}{۱} \times \frac{۳!}{۲!} = ۴۵$$

بنابراین $۱۶۵ = ۱۲۰ + ۴۵$ کلمه می‌توان ساخت.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۳

$$\binom{۴}{۱} \times \frac{۴!}{۳!} \times \frac{۲!}{۱!} = ۴ \times ۲۴ \times ۲ = ۱۹۲$$

جابه‌جایی b,a جایگشت دسته نفری که بین است b,a

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

برای عدد دو رقمی که ارقام آن یکسان هستند، ۹ حالت داریم (۹۹، ...، ۲۲، ۱۱). به جای دایره، ۱۴ حالت داریم و به جای اولین ستاره از سمت چپ،

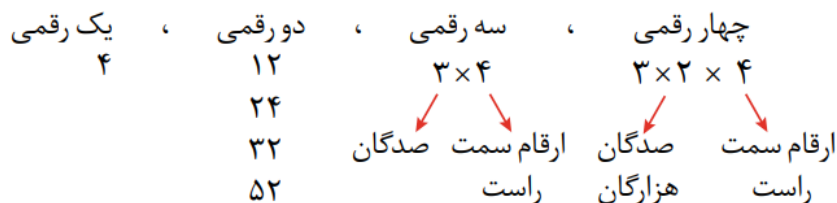
$$4 \times 9 \times 14 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 56 \times 9^5$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

تعداد اعداد قابل نمایش برابر است با:

$$\binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} = 9 + 36 + 84 + 126 = 255$$

(دایز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



اما در اعداد چهار رقمی، هزارگان ۵ را نمی‌خواهیم هم‌چنین ۴۵۳۲ و ۴۵۱۲ را حذف می‌کنیم

$$1 + 4 + 12 + 24 - (2 + 2 + 2 + 2) = 41 - 8 = 33$$

$$\begin{cases} 5 \square 12 \rightarrow \text{حالت ۲} \\ 5 \square 32 \rightarrow \text{حالت ۲} \\ 5 \square 24 \rightarrow \text{حالت ۲} \end{cases}$$

۴۵۳۲

۴۵۱۲

(دایز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته (جایگشت): هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن اشیاء می‌گوییم و برابر است با $n!$.

نکته (تبدیل r شیء از میان n شیء): تعداد حالت‌های انتخاب و چینش r شیء از میان n شیء متمایز (ترتیب اشیاء مهم است و با جابه‌جایی هریک، حالت جدیدی به وجود می‌آید) برابر است با:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

با توجه به نکات، ابتدا دو کد از میان ۳ کد داده‌شده را، انتخاب می‌کنیم که با جایگشت $2!$ ، در ابتدا و انتهای رمز قرار می‌گیرند:

$$P(3, 2) = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

اینک ارقام در کنار هم $3!$ و حروف نیز کنار هم $3!$ جایگشت دارند و از طرفی دسته ارقام و دسته حروف در کنار یک کد باقی‌مانده، 3 شیء متمایز محسوب می‌شوند که با هم $3!$ جایگشت دارند.

$$6 \times 3! \times 3! \times 3! = (3!)^4 = 6^4$$

پس طبق اصل ضرب، تعداد کل رمزها برابر است با:

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۸

نکته (ترکیب I' شیء از میان n شیء): تعداد حالت‌های انتخاب I' شیء از میان n شیء متمایز (فقط انتخاب مهم است و ترتیب اشیاء مهم نیست و جابه‌جایی اشیاء حالت جدیدی تولید نمی‌کند) برابر است با:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

در میان اعضای مجموعه A ، فقط یک عضو زوج وجود دارد (عدد ۶). از طرفی اگر بخواهیم مجموع ۴ عضو فرد باشد، حتماً باید یکی از آن‌ها زوج باشد و این یعنی زیرمجموعه چهارعضوی لزوماً شامل عضو ۶ است. پس ما باید ۳ عضو از میان ۶ عضو فرد مجموعه انتخاب کنیم و با رقم ۶، زیرمجموعه چهارعضوی تشکیل دهیم:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۹

در بین ۵ حرف کلمه «فرهنگ»، دو حرف نقطه‌دار «ن» و «ف» وجود دارد. تعداد کلماتی که با حرف نقطه‌دار شروع می‌شوند، برابر است با:

$$\begin{aligned} 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 &= 2 \times 4! = 48 \\ \{ف, ن\} \end{aligned}$$

تعداد کلماتی که به حرف نقطه‌دار ختم می‌شوند، برابر است با:

$$\begin{aligned} 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 &= 4! \times 2 = 48 \\ \{ف, ن\} \end{aligned}$$

کلماتی که هم با حرف نقطه‌دار شروع و هم به حرف نقطه‌دار ختم می‌شوند، در هر دو حالت فوق شمرده شده‌اند، تعداد این کلمات برابر است با:

$$2 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 2 \times 1 \times 3! = 12$$

بنابراین تعداد کلماتی که با حرف نقطه‌دار شروع یا به حرف نقطه‌دار ختم می‌شوند، برابر است با:

$$48 + 48 - 12 = 96 - 12 = 84$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۰

عدد موردنظر ۴ رقمی است و باید دو رقم آن فرد باشد، پس باید دو رقم دیگر زوج باشد.

بنابراین باید ۲ رقم از ارقام $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ و ۲ رقم از ارقام $\{2, 4, 6, 8\}$ انتخاب کرده و سپس جایگشت آن‌ها را به دست آوریم.

پس حاصل برابر است با:

$$\text{تعداد اعداد مطلوب} = \binom{5}{2} \times \binom{4}{2} \times 4! = 10 \times 6 \times 24 = 1440$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۱

نکته: تعداد راه‌های انتخاب k شیء از بین n شیء متمایز برابر است با: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

راه حل اول: ۶ لنگه کفشی که انتخاب می‌شوند باید از ۴ جفت کفش باشند (۲ جفت کامل و دو لنگه از دو جفت دیگر) پس ابتدا ۴ جفت کفش از بین ۶ جفت موجود انتخاب کرده، سپس دو جفت از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم و از هر کدام از دو جفت کفش باقی‌مانده یک لنگه را انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{6}{4} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = \frac{6 \times 5}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} \times 2 \times 2 = 15 \times 6 \times 2 \times 2 = 90 \times 4 = 360$$

راه حل دوم: ابتدا دو لنگه کفش را از بین ۱۲ لنگه کفش انتخاب می‌کنیم. سپس ۲ جفت کفش را از بین ۴ جفت باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم:

$$\frac{\binom{12}{1} \binom{10}{1}}{2} \times \binom{4}{2} = \frac{12 \times 10}{2} \times 6 = 360$$

تقسیم بر ۲ موجود در فرمول به علت حذف کردن ترتیب انتخاب بین دو لنگه کفش ابتدایی است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۲

نکته ۱: به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم. تعداد

ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز را با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

نکته ۲: تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر $\binom{n}{r}$ می‌باشد.

می‌خواهیم اعداد ۲ و ۳ در زیرمجموعه باشند، پس آن‌ها را حتماً انتخاب می‌کنیم و چون می‌خواهیم اعداد ۴ و ۵ در زیرمجموعه نباشند آن‌ها را انتخاب نمی‌کنیم.

در زیرمجموعه‌های ۳ عضوی، ۲ و ۳ هستند، پس باید عضو سوم را از بین اعداد $\{1, 6, 7, 8, 9\}$ انتخاب کنیم، که برای این کار $\binom{5}{1}$ روش وجود دارد.

در زیرمجموعه‌های ۴ عضوی، ۲ و ۳ هستند، پس باید ۲ عضو باقی‌مانده را از بین اعداد $\{1, 6, 7, 8, 9\}$ انتخاب کنیم که برای این کار $\binom{5}{2}$ روش وجود دارد.

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های ۳ و ۴ عضوی با این شرایط برابر است با:

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 5 + 10 = 15$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۳

نکته ۱: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر $n!$ است.نکته ۲: تعداد حالت‌های انتخاب r شیء از میان n شیء متمایز برابر است با:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ابتدا از بین ۴ نفر دیگر ۲ نفر انتخاب می‌کنیم و بین ۳ خواهر قرار می‌دهیم و این ۵ نفر را به‌عنوان یک گروه در بین ۲ نفر دیگر قرار می‌دهیم، پس:

$$\underbrace{\downarrow}_{\text{جابه‌جایی خواهرها}} 3! \times \underbrace{\left(\binom{4}{2} \times 2!\right)}_{\text{انتخاب ۲ نفر و جایگشت آن‌ها}} \times \underbrace{\downarrow}_{\text{جابه‌جایی کلی}} 3! = 6 \times 6 \times 2 \times 6 = 432$$

$$\overline{S_1 D_1 S_2 D_2 S_3}, D_3, D_4$$

یک گروه

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۴

نکته ۱: تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر 2^n است.نکته ۲: تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه n عضوی از رابطه $\binom{n}{r}$ به‌دست می‌آید.نکته ۳: با توجه به تعداد کل زیرمجموعه‌ها و تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه n عضوی داریم:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

با توجه به نکات داریم:

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 7\} \Rightarrow \text{تعداد کل زیرمجموعه‌ها} = n(S) = 2^7 = 128$$

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های حداقل ۲ عضوی} = n(A) = \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \dots + \binom{7}{7} = 2^7 - \binom{7}{0} - \binom{7}{1}$$

$$\Rightarrow n(A) = 128 - 1 - 7 = 120 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{120}{128} = \frac{15}{16}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۵

حروف کلمه «دنیا» را در یک بسته قرار می‌دهیم، سپس جایگشت بسته و ۲ حرف دیگر را حساب می‌کنیم و در جایگشت حروف درون

بسته ضرب می‌کنیم:

$$\boxed{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{د، ن، ی، ا} & \text{م} & \text{ر} \\ \hline \end{array}} \Rightarrow 4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

راه اول: رقم یکان لزوماً ۱ یا ۳ یا ۵ است، پس ۱ رقم فرد در یکان مصرف شده (۳ حالت) و از بین دو رقم فرد دیگر، حداقل یکی بین ۲ و ۴ است. حالت‌های زیر را داریم:

۱۳۶

فرد / یکان فرد / یکان

۴ فرد ۲ فرد یا ۴ فرد ۲ فرد

۳ × (۲ × ۲!) × ۲ + ۲! ۲! = ۳ × (۱ + ۴) = ۳۶

↓ ↓ ↓ ↓

رقم فرد بیرون جای دسته نسبت به فرد بیرون درون دسته درون دسته

رقم فرد یکان درون دسته برای ۲ و ۴ فردها درون دسته

راه دوم: یک رقم فرد در یکان است: ۳ حالت

حالا ۴ رقم دیگر $24 = 4!$ حالت دارند که حالت $\frac{\text{فرد}}{\text{بکان}}$ (۴ و ۲) فرد فرد قبول نیست، پس:

$3 \times (24 - 2! \times 3!) = 3 \times 12 = 36$

۲ و ۴ درون دسته ۲ و ۴ در کنار دو فرد دیگر

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

ترکیب‌های مورد قبول عبارت‌اند از:

۱۳۷

یک تهرانی و دو نفر غیرهمشهری از شهرهای ۴ نفری:

$$\begin{matrix} \text{نفر تهرآن} \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} \text{شهر} \\ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \text{نفر} \\ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \text{نفر} \\ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = 480$$

یک تهرانی و یک کرمانی و یک نفر از شهرهای ۴ نفری:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 160$$

سه نفر از شهرهای ۴ نفری:

$$\begin{matrix} \text{نفر} & \text{نفر} & \text{نفر} & \text{شہر} \\ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = 256$$

یک کرمانی و دو نفر غیرهمشهری از شهرهای ۴ نفری:

$$\begin{matrix} \text{نفر} & \text{نفر} & \text{شهر} & \text{کرمان} \\ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \end{matrix} \times = 192$$

پس جمعاً ۱۰۸۸ حالت داریم.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۸

یکی از حالت‌های ممکن را می‌نویسیم:

** هستی *** فرزاد * نرگس **

تعداد کل جایگشت‌ها ۱۱! است که آن را بر جایگشت‌های هستی، نرگس و فرزاد یعنی ۳! تقسیم می‌کنیم و چون هستی و نرگس می‌توانند باهم جابه‌جا شوند تعداد حالات را در ۲ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{11!}{3!} \times 2 = \frac{11!}{6} \times 2 = \frac{11!}{3}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۹

چهار مکان برای قرار دادن ارقام در نظر می‌گیریم. رقم صفر هم می‌تواند در سمت چپ قرار بگیرد. برای مثال عدد ۰۳۲۳، یک عدد سه‌رقمی و مورد قبول است. رقم ۳ در سمت چپ نمی‌تواند قرار بگیرد؛ زیرا عدد، بزرگ‌تر از ۱۴۰۲ می‌شود، پس ۳ حالت برای قرار گرفتن دو رقم ۳ داریم:

حالت اول: - ۳۳ -

حالت دوم: ۳ - ۳ -

حالت سوم: ۳ ۳ - -

در حالت اول و دوم رقم سمت چپ حتماً باید صفر یا ۱ باشد (۲ حالت). در این صورت عدد حاصل حتماً کمتر از ۱۴۰۲ خواهد بود؛ بنابراین یک رقم باقی‌مانده هر مقداری (به‌جز ۳) می‌تواند داشته باشد (۹ حالت). پس هر کدام از حالت‌های اول و دوم $2 \times 9 = 18$ مقدار مورد قبول دارند.

در حالت سوم دو رقم سمت چپ می‌توانند از ۰۰ تا ۱۳ باشند؛ به‌جز ۰۳ و ۱۳ (۱۲ حالت). پس کل اعداد برابر است با:

$$\text{کل اعداد} = 18 + 18 + 12 = 48$$

راه دوم: اعداد مورد نظر حالت‌های زیر را دارند:

$$\begin{array}{cccccc} 33, & -33, & 3-3, & 33-, & 133-, & 13-3, & 1-33 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{تا } 8 & \text{تا } 9 & \text{تا } 9 & \text{تا } 9 & \text{تا } 9 & \text{تا } 9 & \text{تا } 3 \end{array}$$

پس روی هم ۴۸ حالت داریم.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

داده‌های هر دو گروه را به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$\text{گروه اول: } \binom{15}{4}, \binom{15}{5}, \binom{15}{6}, \binom{15}{7}$$

$$Q_2 = \text{میانگین دو داده وسط} = \frac{\binom{15}{5} + \binom{15}{6}}{2}$$

$$\text{گروه دوم: } \underbrace{\binom{16}{11}}_{\binom{16}{5}}, \binom{16}{6}, \underbrace{\binom{16}{10}}_{\binom{16}{6}}, \binom{16}{7}, \underbrace{\binom{16}{9}}_{\binom{16}{7}}, \binom{16}{8}$$

$$Q_3 = \binom{16}{9} = \binom{16}{7}$$

$$2Q_2 + Q_3 = \underbrace{\binom{15}{5} + \binom{15}{6}}_{\binom{16}{6}} + \binom{16}{7}$$

پس داریم:

$$\binom{15}{5} + \binom{15}{6} = \binom{16}{6}$$

$$\binom{16}{6} + \binom{16}{7} = \binom{17}{7} = \binom{17}{10}$$

$$\text{می‌دانیم که } \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

و مجدداً با استفاده از همین قانون داریم:

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

حالت اول: کتاب اول و آخر از رشته تجربی باشد:

$$\underbrace{6}_{\text{اول}} \times \underbrace{11!}_{\text{کتاب‌های وسط}} \times \underbrace{5}_{\text{آخر}} = 30 \times 11!$$

میان ۱۱ کتاب باقی‌مانده تفاوتی نیست و جایگشت ساده است.

حالت دوم: کتاب اول و آخر از رشته ریاضی باشد:

$$\underbrace{7}_{\text{اول}} \times \underbrace{11!}_{\text{کتاب‌های وسط}} \times \underbrace{6}_{\text{آخر}} = 42 \times 11!$$

بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:

$$(30 \times 11!) + (42 \times 11!) = 72 \times 11! = 6 \times 12!$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۲

برای پیدا کردن حالتی که دو حرف S کنار یکدیگر نیستند، دو حرف S را یک بسته در نظر می‌گیریم و حالتی که S کنار

$$\frac{7!}{2!} - 6! = 6! \left(\frac{7}{2} - 1 \right) = \frac{5}{2} \times 6!$$

هم هستند را از کل حالات کم می‌کنیم:

همچنین برای دو حرف A و N دو حالت وجود دارد، یا A زودتر آمده است، یا N زودتر آمده است؛ از آنجایی که شرط خاصی در صورت سؤال ذکر نشده و این دو حرف با هم تفاوتی ندارند، در نصف کلمات ساخته شده A زودتر آمده و در نصف دیگر N

$$b = \frac{7!}{2!} \times \frac{1}{2}$$

زودتر آمده است، پس

$$\frac{\frac{5}{2} \times 6!}{\frac{7!}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{5}{7}$$

خواسته سؤال را محاسبه می‌کنیم:

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

حروف P, N, M, S را می‌چینیم: $4! = 24$ ، مثلاً: OPOMONOSO و سپس در ۵ فضای بین آن‌ها و گوشه‌ها، ۳

۱۴۳

حرف A قرار می‌دهیم: $\binom{5}{3} = 10$ پس $24 \times 10 = 240$ حالت داریم.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

بادکنک دو تا (ک) دارد، ۲ حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱۴۴

الف) صفر یا یک «ک» در تشکیل کلمه شرکت کند:

انگار قرار است با حروف کلمه «بادکن» کلمه چهار حرفی بسازیم:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

ب) هر دو حرف «ک» در تشکیل کلمه شرکت کنند:

دو حرف دیگر را از میان حروف «بادن» انتخاب و سپس ۴ حرف موجود را به روش جایگشت با تکرار، جابه‌جا می‌کنیم:

$$\binom{4}{2} \times \frac{4!}{2!} = 72$$

تعداد کل حالات، طبق اصل جمع برابر است با:

$$120 + 72 = 192$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

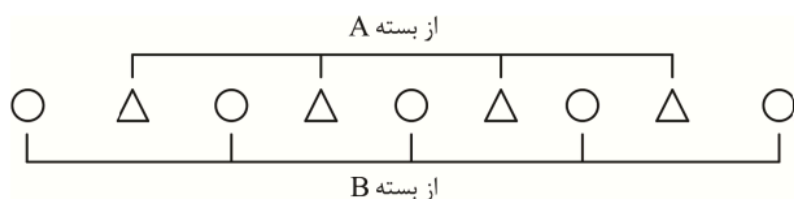
گزینه ۲ درست است.

بسته‌های A و B به صورت زیر تعریف شده‌اند:

بسته A: شامل حروف E, L, L, E ← ۴ حرف

بسته B: شامل حروف S, T, G, H, A ← ۵ حرف

برای آنکه حروف بسته A با حروف بسته B به صورت یکی در میان باشد، با حروف بسته B شروع کرده و به صورت زیر، چیدمان را انجام می‌دهیم:



از آنجا که با حذف حروف بسته B، قرار است که هیچ دو حرف یکسانی کنارهم نباشند، حروف بسته A باید در میان خودشان نیز به صورت یکی در میان باشند، پس یکی از دو حالت کلی زیر مدنظر است:



واضح است که در هر کدام از این دو حالت، حروف بسته B به ۵ حالت جابه‌جا می‌شوند و جواب نهایی برابر است با:

$$2 \times 5! = 2 \times 120 = 240$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)